TRAINING GUIDE FOR DISCIPLINE "GAME THEORY"

ISBN:

Authored By
Abdullaeva D.K.

Published by
Novateur Publication
novateurpublication.com

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Абдуллаева Д.К.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«ТЕОРИЯ ИГР »

Ташкент

2021

Содержание

Описание курса

Теория игр - математический метод изучения оптимальных стратегий в играх. Под игрой понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущие борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к выигрышу или проигрышу - в зависимости от поведения других игроков. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учётом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках.

Курс по теории игр посвящен введению в принципы моделирования взаимодействия агентов в ситуациях, когда своими действиями они влияют друг на друга. В процессе обучения студенты поймут, почему ведущие сотовые операторы вряд ли смогут получать монопольные прибыли, почему у ОПЕК не очень получается влиять на цену на нефть, а также как принять правильное решение в условиях боевых действий или в семейном кругу. Студенты научатся делать выбор с учётом действий окружающих людей и поймут, почему часто самый правильный выбор - случайный, а большинство не всегда оказывается правым. Студенты также узнают, почему людям бывает так сложно договориться, и как правильно создавать правильно работающие механизмы распределения дефицитных ресурсов в самых разных областях - от процедуры государственных закупок до донорских почек.

Теория игр как один из подходов в прикладной математике применяется для изучения поведения человека и животных в различных ситуациях. Первоначально теория игр начала развиваться в рамках экономической науки, позволив понять и объяснить поведение экономических агентов в различных ситуациях. Позднее область применения теории игр была расширена на другие социальные науки; в настоящее время теория игр используется для объяснения поведения людей в политологии, социологии и психологии.

ГЛАВА 1. ПРОБЛЕМАТИКА И ИСТОРИЯ СТАНОВЛЕНИЯ ТЕОРИИ ИГР.
СВЯЗЬ ТЕОРИИ ИГР С ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИЕЙ

1.1. Введение в проблематику теории игр.

Теория игр - это раздел прикладной математики, научная дисциплина, направленная на поиск оптимальных решений в различных проблемных ситуациях. Теория игр – это математическая теория поиска оптимальных решений в *конфликтных* ситуациях. Под конфликтной ситуацией понимают ситуацию, в которой два или более участника преследуют различные цели, а результат, получаемый каждым из участников, зависит не только от его собственных действий, но и от действий других участников конфликта. В экономике конфликтные ситуации встречаются очень часто. К ним относятся, например, взаимоотношения между производителями и потребителями, покупателями и продавцами, банками и их клиентами, страхователями и страховщиками.

Во всех перечисленных примерах конфликтная ситуация порождается различием интересов сторон (например, покупатель хочет купить по низкой цене, а продавец стремится продавать по высокой цене), необходимостью считаться не только со своими интересами, но и интересами другой стороны, учитывать при принятии решений возможные действия оппонента. Для выработки правильных решений в таких ситуациях необходимы научно обоснованные методы, разработкой которых и занимается теория игр.

Многообразие ситуаций принятия решений в экономике и в других сферах имеет три общие черты, которые можно сформулировать в виде трех принципов:

1. Конечный результат зависит от выбора решений несколькими лицами (которых мы будем называть участниками игры). Этот принцип носит название «совместность действий».

2. Принцип, согласно которому возникает конфликт между участниками какого-либо общего процесса из-за несовпадения их интересов, носит название «конфликт интересов».

3. Участник экономического процесса стоит перед выбором решения, которое в наибольшей степени должно соответствовать его интересам Для выбора разумного (т.е. рационального) решения, участник должен осознавать, что другие участники имеют собственные интересы, а значит, будут выбирать решения, которые выгодны им. Принцип, согласно которому каждый участник конфликта принимает наиболее эффективные для достижения своих интересов решения, учитывая возможные действия других участников, называется принципом рациональности.

Легко заметить, что эти три принципа характерны для любой конфликтной ситуации не только в экономике. Примерами конфликтов служат спортивные состязания, политическая борьба, карточные игры, трудовые отношения, рыночное ценообразование, конкуренция, цена акций и т.п. Все эти разнообразные конфликтные ситуации допускают общие формализованные описания и анализ с помощью математических методов. Формализованное описание конфликта (т.е. его математическая модель) называется игрой (The Game). Теория игр является разделом математики, в котором изучаются математические модели конфликтов.

Игра с неполной информацией является удобной моделью для исследования конфликтных ситуаций в области международных отношений. Если одна из сторон обладает информацией, неизвестной другой стороне, то существует три возможные стратегии относительно того, как распорядиться этой информацией: скрыть ее от другого игрока; передать другому игроку всю информацию или ее часть; передать другому игроку неверную информацию, т.е. дезинформировать его. Можно привести немало примеров применения этих стратегий: например, от противника обычно скрывают готовящееся наступление. В то же время, иногда выгоднее дать противнику знать о своих возможностях, чтобы избежать его нападения. Например, Израиль сознательно допустил утечку информации об обладании ядерной бомбой, чтобы охладить экстремистские круги в арабских странах.

Аналогично, демонстрация военной техники на парадах – это сигнализация своим противникам об имеющихся возможностях.

В анализе международных отношений игры с неполной информацией используются в настоящее время применительно к политике сдерживания и кризисного реагирования; соглашениям по контролю за вооружениями; формированию международных альянсов; международному лидерству.

Что управляет людьми в их взаимоотношениях с себе подобными? Почему в одних случаях конфликтная ситуация заканчивается войной, а в других разрешается миром? Как люди приходят к разным соглашениям или конвенциям, например, о том, по правой или по левой стороне дороги будут они ездить на автомобилях? За счет чего в одних странах складываются нормы честного поведения, а в других обман и надувательство могут даже вовсе не считаться грехом? Чем в конечном счете определяется формирование тех или иных общественных институтов? Разумеется, о нахождения исчерпывающих ответов на подобные вопросы очень и очень далеко. Но, возможно, это как раз тот случай, когда сама постановка вопроса может оказаться ценнее конкретного ответа, поскольку она позволяет более глубоко взглянуть и на принципы взаимодействий в общественных отношениях, и на смысл хорошо известных экономических теорий.

Однако эти концепции равновесий сами по себе не могут ни считаться последним словом в теории игр, ни служить инструментом для интерпретаций содержательных социальных взаимодействий. Так, в подавляющем большинстве игр, представляющих экономический интерес, оказывается более одного равновесия Нэша, и далеко не все они "отсекаются" такими усилениями равновесия, как совершенство по подиграм и байесовские равновесия. Кроме того, в последнее десятилетие экономисты стали все активнее интересоваться поведенческими и психологическими детерминантами социального поведения, для изучения которых часто используются экспериментальные методы.

1.2. История теории игр и ее связь с экономической теорией

История теории игр и ее связь с экономической теорией обусловлена тем, что отдельные задачи на поиск оптимальных решений в конфликтных ситуациях ставились математиками еще в XVIII веке.

Например, задача производства и ценообразования в условиях олигополии, ставшая впоследствии хрестоматийным примером в теории игр, была поставлена и решена французским математиком А.Курно в XIX веке. В начале XX века Э.Ласкер, Э.Цермело, Э.Борель выдвинули идею математической теории конфликта интересов.

Математическая теория игр берет свое начало из неоклассической экономической теории. В начале XX века было осознано, что в экономической теории отсутствует важная часть – теория, описывающая принятие решений участниками рынка.

Два видных математика – экономиста своего времени Оскар Моргенштерн и Джон фон Нейман задались целью найти ответ на этот вопрос. Исследователи пришли к выводу, что поведение участников рынка более всего похоже на поведение соревнующихся между собой игроков. По результатам своих исследований в 1944г.

Монгерштейн и фон Нейман опубликовали книгу «Теория игр и экономическое поведение», в которой сформулировали определение игры как деятельности двух или более участников, стремящихся в каким – либо выигрышам, способных распоряжаться какими-либо ресурсами, взаимодействовать между собой и принимать решения, основанные на анализе поведения других участников. Кроме того, в книге математически описан способ поиска оптимальных решений участников игры. Отметим, что в монографии Монгерштерна и фон Неймана рассматривались преимущественно игры с нулевой суммой (когда сумма выигрышей всех участников равна 0, т.е. выигрыш одних - это проигрыш других) и кооперативные (или коалиционные) игры, т.е. игры, в которых игроки могут вступать в выгодные им коалиции, заключая взаимообязывающие соглашения.

Дальнейшее развитие теория игр получила благодаря трудам Джона Нэша. Спустя 5 лет после публикации книги «Теория игр и экономическое поведение», в 1949г. он написал диссертацию по теории игр, посвященную бескоалиционным играм, в которых общий выигрыш игроков не равен нулю при любом исходе игры (игры с ненулевой суммой; в которых помимо противоположных у игроков имеются и общие интересы).

Центральной идеей Нэша является концепция равновесия, ныне носящего его имя. Равновесие по Нэшу это такая комбинация стратегий участников конфликта, при которой ни один из участников не заинтересован в одностороннем порядке менять свою стратегию.

Эта концепция получила название «равновесие по Нэшу», которое стало типовым инструментом анализа почти во всех разделах экономической теории, когда необходим комплексный анализ взаимодействия экономических субъектов. Концепция Нэша активно применяется в анализе конкуренции, олигополии, теории промышленной организации, в макроэкономике при анализе экономической политики, охране окружающей среды. В экономике информации Нэш предложил базовое решение по сделкам для игр как с фиксированными, так и с изменяющимися угрозами.

Работы Нэша заложили основы для теории кооперативных и некооперативных игр как самостоятельной теоретической дисциплины. В 1960-е гг. в трудах математика Исраэля Роберта Джона Аумана стала развиваться теория повторяющихся игр, представляющая собой модель взаимодействия участников, повторяющегося много раз. В рамках этой теории удается объяснить множество феноменов, в частности, например, почему совместная работа затрудняется при большом количестве участников, или почему они редко взаимодействуют, когда высока вероятность того, что взаимодействие прекратится по экзогенным причинам.

Схема повторяющихся игр проливает свет на существование и функционирование различных общественных институтов: от торговых гильдий до Всемирной торговой организации и мафии.

В 1960 г. американский экономист Томас Шеллинг опубликовал книгу «Стратегия конфликта», в которой он обосновал, что формальное описание игры как набора игроков, стратегий и выигрышей недостаточно для описания того, игроки принимают решения в реальных конфликтных ситуациях. В этом смысле показателен следующий пример, известный как "задача о встрече". Два человека непременно должны встретиться в одном городе завтра в 12:00, и, хотя они знают дату и время, у них нет никакой возможности договориться о месте. Понятно, что вариантов решений у игроков сотни и тысячи – все мыслимые и различимые места в городе, где они оба могут одновременно оказаться и получить положительный выигрыш в том и только в том случае, если они оказались одновременно на одном месте, и нули – если они разминулись.

Если подойти к данной задаче с формальной точки зрения, то решить ее, вероятно, нет никаких шансов: как два игрока могут, не сговариваясь, выбрать один и тот же единственный из многих сотен вариант? Шеллинг заметил, что это рассуждение правильно только с формальной точки зрения: в реальности у таких двух человек есть отличный от нуля шанс пересечься в одном месте, при том что это должно быть место, которое обоим представляется самым естественным. Оно, конечно, будет зависеть от контекста: для Нью-Йорка Шеллинг предложил Центральный вокзал, два гостя Москвы вероятнее всего пойдут на Красную площадь, а если где-то в городе разминулись муж и жена, то им естественнее всего прийти к себе домой. Такие равновесия, которые в описании игры формально никак не отличаются, однако с точки зрения реальных игроков более вероятны, чем остальные, Шеллинг назвал *фокальными точками*.

Человеческая способность выбирать такие фокальные точки доказана экспериментально и является, по-видимому, одним из основных факторов успешной координации широкого круга социальных взаимодействий. В одном из экспериментов Шеллинга 42 человека должны были выбрать "орел" или "решку", не зная, какой выбор сделали все остальные, причем выигрыш каждого из участников зависел от того, сколько участников сделали тот же самый выбор, что и они. Если рассуждать формально, то ожидаемое количество совпадений для каждого участника эксперимента должно быть равно 20 или 21. В действительности же 36 человек из 42 выбрали "орел", так что совпадений оказалось на 15 больше их "ожидаемого" числа, – и это при том, что вероятность случайного выпадения 36 "орлов" из 42 попыток меньше 0,0001! В данном случае роль координирующего механизма играют, вероятно, порядок перечисления альтернатив и языковое клише "орел или решка?", в котором на первом (более заметном) месте стоит вариант "орел".

В других случаях задачи координации сложнее и менее однозначны, однако даже когда группам участников предлагали, не сговариваясь, выбрать какое-либо одно натуральное число (из бесконечного множества возможных!), то около 40% игроков справились с этой задачей, остановившись на таких числах, как 1, 3, 7 или 13.

Шеллинг был, вероятно, одним из первых, кто заметил, что рациональное поведение в конфликтной ситуации может состоять не только в том, чтобы максимизировать собственный ожидаемый выигрыш, но и также в том, чтобы убедить оппонента, какой стратегии игрок будет следовать. Иначе говоря, рациональное поведение в игре должно учитывать, что взаимодействие носит долговременный и многошаговый характер. Поэтому иногда можно ухудшить свое положение на определенном этапе конфликта ради того, чтобы оппонент поверил в то, что вы будете придерживаться определенной стратегии в более долгосрочной перспективе. Примеры решений такого рода: «чтобы доказать, что я для вас безопасен, я кладу свой пистолет на землю»; «чтобы убедить вас, что я ни за что не сдамся, мне придется приковать себя цепями к этому месту».

Эти примеры выражают суть стратегий, которые характеризуются свойствами "достоверных обязательств": если убедить оппонента в игре, что будете во что бы то ни стало следовать какой-то конкретной стратегии, то он станет исходить из этого как из данности, что ограничит свободу его маневра. Именно такая логика легла в основу понятия равновесия, совершенного по подиграм, введенного Зельтеном, однако именно Шеллинг первым указал на важность данного принципа в стратегических взаимодействиях.

В конце 1960-х гг. Джон Харсаньи ввел понятие игр с неполной информацией и разработал концепцию байесовых равновесий. Он рассматривал ситуации, когда у одного игрока нет информации о возможных выигрышах другого игрока, и поэтому он вынужден оценивать их вероятностно. В серии работ «Игра с неполной информацией» разработана методика анализа конкретных экономических ситуаций, возникающих в связи с принятием решений в условной неполной информации о положении другого участника игры. Харсаньи доказал, что для каждой игры с неполной информацией имеется эквивалентная игра с полной информацией.

При помощи математического аппарата теории игр Харсаньи преобразовывал игры с неполной информацией в игры с совершенной информацией. Его работы заложили основы для экономики информации – раздела экономической теории, изучающей экономические аспекты информации, как реализуемой на рынке в виде информационных продуктов и услуг, так и циркулирующей внутри современной организации.

Райнхард Зельтен расширил сферу использования концепции равновесия Нэша в анализе некооперативных игр, имеющих более одного равновесия. Его главная идея состояла в применении более строгих условий игры для того, чтобы не только уменьшить число возможных равновесий, но и не допустить равновесий, нецелесообразных в экономическом отношении. Как уже упоминалось ранее, Зельтен ввел новый важный принцип оптимальности в теории игр – равновесие, совершенное по подиграм.

Его смысл состоит в том, что действия сторон в некоторой конфликтной ситуации будут одинаковы, независимо от того, разыгрывается ли она отдельно или является частью более общей игры. Равновесие, совершенное по под-играм, позволяет отсеять равновесия Нэша, основанные на недостоверных угрозах игроков.

Общим методом определения совершенных по подиграм равновесий является обратная индукция, при которой оптимизация ходов игроков начинается с конца игры.

Концепция равновесия Зелтена оценивается как фундаментальное улучшение равновесия Нэша и широко используется в анализе олигополии. Кроме того, в работе «Новое рассмотрение концепции завершения для пунктов равновесия в экстенсивных играх» Зелтен ввел понятие равновесия «дрожащей руки», обладающее дополнительным свойством устойчивости к достаточно малым отклонениям игроков от равновесных стратегий.

Отметим, что практически все основоположники теории игр были сотрудниками РЭНД Корпорейшн (Research and Development Corporation) – мозгового центра, созданного под эгидой ВВС США в Санта-Монике (штат Калифорния) для исследований в сфере межконтинентальных баллистических ракет. Джон фон Нейман и Мерил Флуд еще в годы Второй мировой войны применили теорию игр для выработки оптимальной стратегии атомной бомбардировки Японии. Шеллинг вместе с Ауманом, Харшаньи, Зельтеном разрабатывал американскую внешнеполитическую стратегию в эпоху холодной войны.

За свои работы в области теории игр Джон Нэш, Джон Харсаньи и Райнхард Зельтен получили в 1994г. Нобелевскую премию по экономике с обоснованием «за анализ равновесия в теории некооперативных игр». Также Нобелевская премия по экономике была присуждена Исраэлю Роберту Джону Ауману и Томасу Шеллингу за «обогащение нашего понимания природы конфликтов и сотрудничества при помощи аппарата теории игр». Работы лауреатов 1994г. создали прежде всего формальный аппарат и критерии, позволяющие определить "рациональные" исходы в статических и динамических играх.

Начиная с 1980-х годов этот инструментарий стал широко применяться для анализа разнообразных социально-экономических взаимодействий - от аукционных торгов до политических процессов, от теории международной торговли до конфликтов на рынке труда. Список подобных приложений множится с каждым днем, и теперь уже трудно представить себе какой-либо раздел экономической науки, способный обойтись без теории игр.

Эта "экспансия" основывалась в первую очередь на трех классических концепциях: равновесия Нэша для некооперативных игр; равновесия, совершенного по подиграм для динамических игр с полной информацией; байесовских равновесий для игр с неполной информацией (то есть на понятиях, введенных в литературу Нэшем, Зельтеном и Харшаньи).

В ходе этих исследований активно накапливаются знания о реальных взаимодействиях живых людей, что не только открывает новые горизонты для теории игр, но и обогащает представления о природе и характере самого человека.

А в том, что такие постановки стали возможными, огромная заслуга принадлежит Роберту Ауману и Томасу Шеллингу.

Ряд исследователей использовали теорию игр для оценки так называемого эффекта замещения – готовности террористов ответить на принимаемые против них меры терактами большей или меньшей силы. Некоторые исследователи посредством теории игр изучают вопрос о том, стоит ли вести переговоры с террористами. События 11 сентября 2001г. спровоцировали всплеск внимания к проблеме международного терроризма, в том числе – со стороны специалистов по теории игр. События на Украине тоже не остались без внимания со стороны специалистов по теории игр. В октябре 2015г. вышла статья Эриксона и Зигера «Украинский кризис 2014: Изучение Российско-Западного стратегического взаимодействия» (Richard E. Ericson and Lester A.Zeager Ukraine Crisis 2014: A Study of Russian-Western Strategic Interaction). Авторы рассматривают украинские события в рамках теории действий – одного из направлений теории динамических (многоходовых) игр. Проблемная ситуация формализуется как игра двух игроков (Российская Федерация и Запад), у каждого из игроков есть три стратегии, также делаются предположения относительно приоритетов сторон с точки зрения двух критериев: геополитического и экономического.

1.3. Предмет и задачи теории игр

В экономике часто возникают ситуации, в которых две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон завися от действий партнеров. Такие ситуации называются конфликтными.

Конфликтная ситуация порождается различием интересов партнеров и стремлением каждого партнера извлечь максимум выгоды. Максимум выгоды реализует оптимальное решение. Однако каждому из партнеров приходится учитывать обычно неизвестные решения других участников. Математическая теория конфликтных ситуаций носит название теории игр.

Моделью конфликтной ситуации является игра. Исход конфликта называется выигрышем, а участники - игроками. Игра ведется по определенным правилам. Правила игры - это допустимые действия каждого из участников и объем доступной информации для каждого игрока о поведении других участников. Также определяются выигрыши для каждой последовательности действий участников (или правила их нахождения). Конкретная реализация игры называется партией. Выбор (осуществление) игроком одного из действий предусмотренных правилами игры называется ходом игрока. Ходы могут быть личными или случайными. Личный ход делается игроком сознательно, после анализа ситуации. Случайный ход действие совершенное наугад без анализа ситуации. Теория игр предлагает модели и их решения при условии, что игроки делают личные ходы. Стратегия игрока – это совокупность правил, определяющих выбор игрока в каждой из возможных ситуаций, в которых он делает свой личный ход. Оптимальной стратегией называется та, которая обеспечивает игроку максимальный выигрыш (или минимальный проигрыш) при условии, что другие игроки придерживаются определенных стратегий. Оптимальные стратегии должны удовлетворять условию устойчивости, то есть любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей оптимальной стратегии в одиночку. Целью теории игр является определение оптимальной стратегии для каждого игрока. Ключевая гипотеза теории игр – предположение, что сознательные игроки действуют рационально. Важнейшее ограничение теории игр - единственность выигрыша как показателя эффективности.

В настоящее время огромный интерес привлекает теория игр, которая, с одной стороны, наряду с математическими моделями общего равновесия и теорией социального выбора, сыграла ключевую роль в создании современной экономической теории, а с другой, является одним из важнейших инструментов анализа огромного многообразия задач, возникающих не только в экономике, но и политике, социальных науках, военном деле, биологии и др.

Суть теории игр (с экономической точки зрения) в том, чтобы помочь экономистам понимать и предсказывать то, что может происходить в экономических ситуациях, и сейчас вряд ли можно найти область экономики или дисциплины, связанной с экономикой, где основные концепции теории игр не были бы просто необходимыми для понимания современной экономической литературы.

В настоящий момент, если говорить об экономических приложениях, речь идет уже не только о применении теоретико-игровых методов к ставшим достаточно традиционными проблемам теории организации промышленности, но и, по сути дела, ко всему многообразию экономической проблематики. Теорию игр следует понимать, как инструмент экономического анализа, который:

1) дает ясный и точный язык исследования различных экономических ситуаций;

2) дает возможность подвергать интуитивные представления проверке на логическую согласованность;

3) помогает проследить путь от "наблюдений" до основополагающих предположений и обнаружить, какие из предположений действительно лежат в основе частных выводов.

Первыми исследованиями игр в экономической литературе, по-видимому, следует считать статьи Курно (Cournot, 1838), Бертрана (Bertrand, 1883) и Эджворта (Edgeworth, 1897), в которых рассматривались проблемы производства и ценообразования в олигополии. Правда, они рассматривались тогда как весьма специфические модели, и в некотором смысле существенно опередили свое время.

Среди многочисленных определений того, что есть теория игр и каковы ее задачи, которые можно найти в различных статьях, учебниках и монографиях (см., например, Воробьев (1984, 1985), Aumann (1989), Dixit/Nalebuff (1991), Fuden-berg/Tirole (1992), Myerson (1991), Rasmussen (1989) и многие другие) упомянем лишь четыре.

Первые два - это определения теории игр, которые с некоторыми вариациями, по-видимому, наиболее часто встречаются в литературе и достаточно точно характеризуют общую проблематику, охватываемую теорией игр: "Теория игр — это теория рационального поведения людей с несовпадающими интересами" (Aumann, 1989), и "Теория игр - наука о стратегическом мышлении" (Dixit/Nalebuff, 1991).

Третье подчеркивает математическую природу теории игр: "Теория игр - это теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов" (Воробьев, 1984). Наконец, четвертое определение выделяет роль теории игр именно в экономическом моделировании: "Суть теории игр в том, чтобы помочь экономистам понимать и предсказывать то, что будет происходить в экономическом контексте" (Kreps, 1990).

В настоящий момент, если говорить об экономическом контексте, речь идет уже не только о применении теоретико-игровых методов к ставшим достаточно традиционными проблемам организации промышленности, но и, по сути дела, ко всему многообразию экономической проблематики. Так, например, на микроуровне - это модели процесса торговли (модели торга, модели аукционов). На промежуточном уровне агрегации изучаются теоретико-игровые модели поведения фирм на рынках факторов производства (а не только на рынке готовой продукции, как в олигополии).

Теоретико-игровые модели возникают в связи с различными проблемами внутри фирмы. Наконец, на высоком уровне агрегации, с международной экономикой связаны модели конкуренции стран по поводу тарифов и торговой политики, а макроэкономика включает модели, в которых, в частности, стратегическое взаимодействие рассматривается в контексте монетарной политики. "Аппарат теории равновесия и теории игр послужил основой для создания современных теорий международной торговли, налогообложения, и общественных благ, монетарной экономики, теории производственных организаций" (Полтерович, 1997).

Классическими задачами системного анализа являются игровые задачи принятия решений в условиях риска и неопределенности.

Неопределенными могут быть как цели операции, условия выполнения операции, так и сознательные действия противников или других лиц, от которых зависит успех операции.

Разработаны специальные математические методы, предназначенные для обоснования решений в условиях риска и неопределенности. В некоторых, наиболее простых случаях эти методы дают возможность фактически найти и выбрать оптимальное решение. В более сложных случаях эти методы доставляют вспомогательный материал, позволяющий глубже разобраться в сложной ситуации и оценить каждое из возможных решений с различных точек зрения, и принять решений с учетом его возможных последствий. Одним из важных условий принятия решений в этом случае является минимизация риска.

При решении ряда практических задач исследования операций (в области экологии, обеспечения безопасности жизнедеятельности и т. д.) приходится анализировать ситуации, в которых сталкиваются две (или более) враждующие стороны, преследующие различные цели, причем результат любого мероприятия каждой из сторон зависит от того, какой образ действий выберет противник. Такие ситуации мы можно отнести к конфликтным **ситуациям**.

Теория игр является математической теорией конфликтных ситуаций, при помощи которой можно выработать рекомендации по рациональному образу действий участников конфликта. Чтобы сделать возможным математический анализ ситуации без учета второстепенных факторов, строят упрощенную, схематизированную модель ситуации, которая называется **игрой**. Игра ведется по вполне определенным правилам, под которыми понимается система условий, регламентирующая возможные варианты действий игроков; объем информации каждой стороны о поведении другой; результат игры, к которому приводит каждая данная совокупность ходов.

Результат игры (выигрыш или проигрыш) вообще не всегда имеет количественное выражение, но обычно можно, хотя бы условно, выразить его числовым значением.

Ход - выбор одного из предусмотренных правилами игры действий и его осуществление. Ходы делятся на личные и случайные. Личным ходом называется сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действий и его осуществление. Случайным ходом называется выбор из ряда возможностей, осуществляемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание монеты, выбор карты из перетасованной колоды и т. п.). Для каждого случайного хода правила игры определяют распределение вероятностей возможных исходов. Игра может состоять только их личных или только из случайных ходов, или из их комбинации. Следующим основным понятием теории игр является понятие стратегии. Стратегия – это априори принятая игроком система решений (вида «ЕСЛИ – ТО»), которых он придерживается во время ведения игры, которая может быть представлена в виде алгоритма и выполняться автоматически.

Целью теории игр является выработка рекомендаций для разумного поведения игроков в конфликтной ситуации, т. е. определение «оптимальной стратегии» для каждого из них. Стратегия, оптимальная по одному показателю, необязательно будет оптимальной по другим.

Сознавая эти ограничения и поэтому не придерживаясь слепо рекомендаций, полученных игровыми методами, можно все же разумно использовать математический аппарат теории игр для выработки, если не в точности оптимальной, то, во всяком случае «приемлемой» стратегии.

1.4. Классификация игр

Игры можно классифицировать: по количеству игроков, количеству стратегий, характеру взаимодействия игроков, характеру выигрыша, количеству ходов, состоянию информации и т.д. [2, 7, 8].

В зависимости от количества игроков различают игры двух и n игроков. Первые из них наиболее изучены. Игры трёх и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения.

В зависимости от числа возможных стратегий игры делятся на «конечные» и «бесконечные».

Игра называется конечной, если у каждого игрока имеется только конечное число стратегий, и бесконечной, если хотя бы у одного из игроков имеется бесконечное число стратегий.

Кооперативные и некооперативные

Игра называется кооперативной, или *коалиционной*, если игроки могут объединяться в группы, взяв на себя некоторые обязательства перед другими игроками и координируя свои действия. Этим она отличается от некооперативных игр, в которых каждый обязан играть за себя. Развлекательные игры редко являются кооперативными, однако такие механизмы нередки в повседневной жизни.

Часто предполагают, что кооперативные игры отличаются именно возможностью общения игроков друг с другом. В общем случае это неверно. Существуют игры, где коммуникация разрешена, но игроки преследуют личные цели, и наоборот.

Из двух типов игр, некооперативные описывают ситуации в мельчайших деталях и выдают более точные результаты. Кооперативные рассматривают процесс игры в целом. Попытки объединить два подхода дали немалые результаты. Так называемая *программа Нэша* уже нашла решения некоторых кооперативных игр как ситуации равновесия некооперативных игр.

Гибридные игры включают в себя элементы кооперативных и некооперативных игр. Например, игроки могут образовывать группы, но игра будет вестись в некооперативном стиле. Это значит, что каждый игрок будет преследовать интересы своей группы, вместе с тем стараясь достичь личной выгоды.

Симметричные и несимметричные

Игра будет симметричной тогда, когда соответствующие стратегии у игроков будут равны, то есть иметь одинаковые платежи. Иначе говоря, если игроки могут поменяться местами и при этом их выигрыши за одни и те же ходы не изменятся. Многие изучаемые игры для двух игроков - симметричные.

	А	Б
А	1, 2	0, 0
Б	0, 0	1, 2

Несимметричная игра

В частности, таковыми являются: «Дилемма заключённого», «Охота на оленя», «Ястребы и голуби». В качестве несимметричных игр можно привести «Ультиматум» или «Диктатор».

В примере справа игра на первый взгляд может показаться симметричной из-за похожих стратегий, но это не так — ведь выигрыш второго игрока при профилях стратегий (А, А) и (Б, Б) будет больше, чем у первого.

С нулевой суммой и с ненулевой суммой

	А	Б
А	−1, 1	3, −3
Б	0, 0	−2, 2

Игра с нулевой суммой

Определение. В играх с нулевой суммой одни игроки выигрывают за счет других, т.е. суммарный выигрыш всех игроков равен нулю.

Определение. Парные игры с нулевой суммой называются антагонистическими**.**

Определение. Конечные антагонистические игры называются матричными играми.

Игры с нулевой суммой — особая разновидность игр с постоянной суммой, то есть таких, где игроки не могут увеличить или уменьшить имеющиеся ресурсы, или фонд игры. В этом случае сумма всех выигрышей равна сумме всех проигрышей при любом ходе. Посмотрите на таблицу — числа означают платежи игрокам — и их сумма в каждой клетке равна нулю. Примерами таких игр может служить покер, где один выигрывает все ставки других; реверси, где захватываются фишки противника; либо банальное *воровство*.

Многие изучаемые математиками игры, в том числе уже упоминавшаяся «Дилемма заключённого», иного рода: в *играх с ненулевой суммой* выигрыш какого-то игрока не обязательно означает проигрыш другого, и наоборот. Исход такой игры может быть меньше или больше нуля. Такие игры могут быть преобразованы к нулевой сумме — это делается введением **фиктивного игрока**, который «присваивает себе» излишек или восполняет недостаток средств.

Ещё игрой с отличной от нуля суммой может являться *торговля*, где каждый участник извлекает выгоду. Широко известным примером, где она уменьшается, является *война*.

Параллельные и последовательные

В параллельных играх игроки ходят одновременно, или, по крайней мере, они не осведомлены о выборе других до тех пор, пока *все* не сделают свой ход. В последовательных, или *динамических*, играх участники могут делать ходы в заранее установленном либо случайном порядке, но при этом они получают некоторую информацию о предшествующих действиях других. Эта информация может быть даже *не совсем полной*, например, игрок может узнать, что его противник из десяти своих стратегий *точно не выбрал* пятую, ничего не узнав о других.

Различия в представлении параллельных и последовательных игр рассматривались выше. Первые обычно представляют в нормальной форме, а вторые — в экстенсивной.

С полной или неполной информацией

Важное подмножество последовательных игр составляют игры с полной информацией. В такой игре участники знают все ходы, сделанные до текущего момента, равно как и возможные стратегии противников, что позволяет им в некоторой степени предсказать последующее развитие игры. Полная информация недоступна в параллельных играх, так как в них неизвестны текущие ходы противников. Большинство изучаемых в математике игр — с неполной информацией. Например, вся суть *Дилеммы заключённого* или *Сравнения монеток* заключается в их неполноте.

В то же время есть интересные примеры игр с полной информацией: «Ультиматум», «Многоножка». Сюда же относятся шахматы, шашки, го, манкала и другие.

Часто понятие полной информации путают с похожим — **совершенной информации**. Для последнего достаточно лишь знание всех доступных противникам стратегий, знание всех их ходов необязательно.

Игры с бесконечным числом шагов

Игры в реальном мире или изучаемые в экономике игры, как правило, длятся *конечное* число ходов. Математика не так ограничена, и, в частности, в теории множеств рассматриваются игры, способные продолжаться бесконечно долго. Причём победитель и его выигрыш не определены до окончания всех ходов.

Задача, которая обычно ставится в этом случае, состоит не в поиске оптимального решения, а в поиске хотя бы выигрышной стратегии. Используя аксиому выбора, можно доказать, что иногда даже для игр с полной информацией и двумя исходами — «выиграл» или «проиграл» — ни один из игроков не имеет такой стратегии. Существование выигрышных стратегий для некоторых особенным образом сконструированных игр имеет важную роль в дескриптивной теории множеств.

Дискретные и непрерывные игры

Большинство изучаемых игр *дискретны*: в них конечное число игроков, ходов, событий, исходов и т. п. Однако эти составляющие могут быть расширены на множество вещественных чисел. Игры, включающие такие элементы, часто называются дифференциальными. Они связаны с какой-то вещественной шкалой (обычно — шкалой времени), хотя происходящие в них события могут быть дискретными по природе. Дифференциальные игры также рассматриваются в теории оптимизации, находят своё применение в технике и технологиях, физике.

Метаигры

Это игры, результатом которых является набор правил для другой игры (называемой *целевой* или *игрой-объектом*). Цель метаигр — увеличить полезность выдаваемого набора правил. Теория метаигр связана с теорией оптимальных механизмов.

По **характеру взаимодействия** игры делятся на бескоалиционные: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции; коалиционные (кооперативные) – могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции заранее определены.

По характеру выигрышей игры делятся на: игры с нулевой суммой (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и игры с ненулевой суммой.

По виду **функций выигрыша** игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые и др.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 1, столбец – номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение и оно может быть легко найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец – стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице – выигрыш игрока 2.)

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется **выпуклой**. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определённого числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

Контрольные вопросы

1. Какое место в науке занимает теория игр?
2. Что такое конфликтная ситуация?
3. Что является предметом исследования теории игр?
4. Когда теория игр становится самостоятельной научной дисциплиной?
5. Кто является основоположником теории игр?

6. Какие игры были предметом исследования Томаса Монгерштерна и Джона фон Неймана?

7. Какие игры были предметом исследования Джона Нэша?

8. Какова основная цель теории игр?

9. Каковы основные задачи, решаемые теорией игр?

10.Назовите виды неопределенностей. Дайте их определения.

11.Какие ситуации называются конфликтными? Приведите примеры.

12.Каковы три составляющие конфликтной ситуации?

13.Дайте определение понятия «игра».

14.Может ли играющую сторону представлять коллектив игроков?

15.Что называется выигрышем игрока?

16.Может ли выигрыш игрока быть отрицательным?

17.Что такое стратегия игрока?

18.Приведите классификацию игр.

19.Объясните разницу между игрой с нулевой и ненулевой суммой.

20.Какие игры, на Ваш взгляд, встречаются чаще: игры с нулевой или ненулевой суммой?

21.Почему матрица игры называется еще и платежной?

22.Что означает понятие «игра с полной информацией»? В чем ее отличие от игры с неполной информацией?

23. Для исследования каких экономических проблем используется теория игр?

24. В каких еще областях кроме экономики теория игр находит свое применение?

ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ ИГР И ЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ

2.1. Матричные игры

Для формального описания игры (конфликта) необходимо зафиксировать следующие моменты:

1. Множество участников, т.е. тех сторон, которые участвуют в конфликте, имеют свои интересы и принимают решения, от которых зависит исход конфликта; будем считать, что число участников счётное (может быть пронумеровано). Иногда заинтересованные лица и лица, принимающие решения могут не совпадать. В дальнейшем будем называть каждого, кто принимает решения, влияющие на исход игры, *игроком*.

2. Возможные действия участников – *стратегии*. Каждый участник (игрок) может выбирать своё действие (стратегию или ход) из некоторого множества доступных ему действий.

Будем обозначать: S_1 – множество стратегий 1-го участника;

S_2 – множество стратегий 2-го участника;

S_n – множество стратегий n-го участника.

Первый участник, независимо от остальных, выбирает стратегию $s_1 \in S_1$, второй – $s_2 \in S_2, \ldots$, n-ый – $s_n \in S_n$. Результат этих независимых выборов можно истолковать как определенную ситуацию x={s_1, s_2,…s_n}, называемую *исходом игры*.

Обозначим всё множество исходов $X = \{x\}$. Очевидно, что это множество исходов будет равно декартову произведению множеств $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

$$X = S_1 \times S_2 \times \ldots S_n$$

3. Каждый исход $x \in X$ приводит к определённым $\times$последствиям для каждого участника. Будем считать, что эти последствия можно выразить количественно и будет называть соответствующее число *выигрышем* участника, т.о. $x \in X$ будет соответствовать набор чисел: $h_1(x)$ – выигрыш 1-го участника; $h_2(x)$ – выигрыш 2-го участника;

…

$h_n(x)$ – выигрыш *n*-го участника.

Всё множество выигрышей можно описать следующим образом:

$H_1 = \{h_1(x)\}$ $x \in X$ – множество выигрышей (проигрышей), т.е. результат игры 1-го участника;

$H_2 = \{h_2(x)\}$ $x \in X$ – результат игры дл 2-го участника;

…

$H_n = \{h_n(x)\}$ $x \in X$ – результат игры *n*-го участника.

Итак, для формального описания игры необходимо:

- задать множество игроков – G;
- задать для каждого из них множество стратегий – $S_i, i \in G$;
- задание функций выигрышей (проигрышей) игроков для каждого из возможных исходов игры (***платёжная функция***).

В нормальной, или стратегической, форме игра описывается **платёжной матрицей**. Каждая сторона (точнее, измерение) матрицы - это игрок, строки определяют

	Игрок 2 стратегия1	Игрок 2 стратегия 2
Игрок 1 стратегия 1	**4**, **3**	**–1**, **–1**
Игрок 1 стратегия 2	**0**, **0**	**3**, **4**

Нормальная форма для игры с 2 игроками, у каждого из которых по 2 стратегии.

стратегии первого игрока, а столбцы - второго. На пересечении двух стратегий можно увидеть выигрыши, которые получат игроки. В примере справа, если игрок 1 выбирает первую стратегию, а второй игрок -вторую стратегию, то на пересечении мы видим (−1, −1), это значит, что в результате хода оба игрока потеряли по одному очку.

Игроки выбирают стратегии с максимальным для себя результатом, но проигрывают из-за незнания хода другого игрока. Обычно в нормальной форме представляются игры, в которых ходы делаются *одновременно*, или хотя бы полагается, что все игроки не знают о том, что делают другие участники.

2.1.1. Запись матричной игры в виде платёжной матрицы

Рассмотрим конечную игру, в которой первый игрок A имеет m стратегий, а второй игрок B - n стратегий. Такая игра называется игрой $m \times n$. Обозначим стратегии A_1, A_2, ..., A_m; и B_1 B_2, .. B_n. Предположим, что каждая сторона выбрала определенную стратегию: A_i или B_j.

Если игра состоит только из личных ходов, то выбор стратегий однозначно определяет исход игры – выигрыш одной из сторон a_{ij}. Если игра содержит кроме личной случайной ходы, то выигрыш при паре стратегий A_i и B является случайной величиной, зависящей от исходов всех случайных ходов. В этом случае естественной оценкой ожидаемого выигрыша является математическое ожидание случайного выигрыша, которое также обозначается за a_{ij}.

Предположим, что известны значения a_{ij} при каждой паре стратегий. Эти значения можно записать в виде прямоугольной таблицы (матрицы), строки которой соответствуют стратегиям Ai, а столбцы - стратегиям Bj.

Тогда, в общем виде матричная игра может быть записана следующей платёжной матрицей (рис. 2.1.1),

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}
...	. . .	. . .	. . .	. . .
A_m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}

Рис. 2.1.1. Общий вид платёжной матрицы матричной игры

где A_i – названия стратегий игрока 1, B_j – названия стратегий игрока 2, a_{ij} – значения выигрышей игрока 1 при выборе им i – й стратегии, а игроком 2 – j - й стратегии. Поскольку данная игра является игрой с нулевой суммой, значение выигрыша для игрока 2 является величиной, противоположенной по знаку значению выигрыша игрока 1.

2.1.2. Понятие о нижней и верхней цене игры.

Каждый из игроков стремится максимизировать свой выигрыш с учётом поведения противодействующего ему игрока. Поэтому для игрока 1 необходимо определить минимальные значения выигрышей в каждой из стратегий, а затем найти максимум из этих значений, то есть определить величину

$$V_н = max_i \, min_j \; a_{ij} ,$$

или найти минимальные значения по каждой из строк платёжной матрицы, а затем определить максимальное из этих значений. Величина $V_н$ называется <u>максимином</u> матрицы или <u>нижней ценой игры</u>.

Та стратегия игрока, которая соответствует максимину $V_н$ называется максиминной стратегией.

Очевидно, если мы будем придерживаться максиминной стратегии, то нам при любом поведении противника гарантирован выигрыш, не меньший $V_н$. Поэтому величина $V_н$ – это тот гарантированный минимум, который мы можем себе обеспечить, придерживаясь своей наиболее осторожной стратегии.

Величина выигрыша игрока 1 равна, по определению матричной игры, величине проигрыша игрока 2. Поэтому для игрока 2 необходимо определить значение

$V_в = min_j \, max_i \, a_{ij}$.

Или найти максимальные значения по каждому из столбцов платёжной матрицы, а затем определить минимальное из этих значений. Величина $V_в$ называется <u>минимаксом</u> матрицы, <u>верхней ценой игры</u> или минимаксным выигрышем. Соответствующая выигрышу стратегия противника называется его минимаксной стратегией. Придерживаясь своей наиболее осторожной минимаксной стратегии, противник гарантирован, что в любом случае он проиграет не больше $V_в$.

В случае, если значения $V_н$ и $V_в$ не совпадают, при сохранении правил игры (коэффициентов a_{ij}) в длительной перспективе, выбор стратегий каждым из игроков оказывается неустойчивым. Устойчивость он приобретает лишь при равенстве $V_н = V_в = V$. В этом случае говорят, что игра имеет <u>решение в чистых стратегиях</u>, а стратегии, в которых достигается V- <u>оптимальными чистыми стратегиями</u>. Величина V называется <u>чистой ценой игры</u>.

Например, в матрице (рис. 2.1.2.) существует решение в чистых стратегиях. При этом для игрока 1 оптимальной чистой стратегией будет стратегия A1, а для игрока 2 – стратегия B4.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Min_j
A_1	17	16	15	14	$\boxed{14}$
A_2	11	18	12	13	11
A_3	18	11	13	12	11
Max_i	18	18	15	$\boxed{14}$	

Рис. 2.1.2. Платёжная матрица, в которой существует решение в чистых стратегиях

В матрице (рис. 2.1.3) решения в чистых стратегиях не существует, так как нижняя цена игры достигается в стратегии A_1 и её значение равно 12, в то время как верхняя цена игры достигается в стратегии B_4 и её значение равно 13.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Min_j
A_1	17	16	15	12	$\boxed{12}$
A_2	11	18	12	13	11
A_3	18	11	13	12	11
Max_i	18	18	15	$\boxed{13}$	

Рис. 2.1.3. Платёжная матрица, в которой не существует решения в чистых стратегиях

2.1.3. Уменьшение порядка платёжной матрицы

Порядок платёжной матрицы (количество строк и столбцов) может быть уменьшен за счёт исключения доминируемых и дублирующих стратегий.

Стратегия K^* называется доминируемой стратегией K^{**}, если при любом варианте поведения противодействующего игрока выполняется соотношение

$A_{k^*} < A_{k^{**}}$,

где A_{k^*} и $A_{k^{**}}$ - значения выигрышей при выборе игроком, соответственно, стратегий K^* и K^{**}.

В случае, если выполняется соотношение

$A_{k^*} = A_{k^{**}}$,

стратегия K^* называется дублирующей по отношению к стратегии K^{**}.

Например, в матрице (рис. 2.1.4) стратегия A_1 является доминируемой по отношению к стратегии A_2, стратегия B_6 является доминируемой по отношению к стратегиям B_3, B_4 и B_5, а стратегия B_5 является дублирующей по отношению к стратегии B_4.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1	2	3	4	4	7
A_2	7	6	5	4	4	8
A_3	1	8	2	3	3	6
A_4	8	1	3	2	2	5

Рис. 2.1.4. Платёжная матрица с доминируемыми и дублирующими стратегиями

Данные стратегии не будут выбраны игроками, так как являются заведомо проигрышными и удаление этих стратегий из платёжной матрицы не повлияет на определение нижней и верхней цены игры, описанной данной матрицей.

Множество недоминируемых стратегий, полученных после уменьшения размерности платёжной матрицы, называется ещё множеством Парето.

Примеры игр

1. Игра «Цыпленок»

Игра «Цыпленок» заключается в том, что игроки вступают во взаимодействие, которое ведет к нанесению серьезного вреда каждому из них, пока один из игроков не выйдет из игры. Пример использования этой игры - взаимодействие автотранспортных средств, например, ситуации, когда два автомобиля идут навстречу друг другу, и тот, который первым сворачивает в сторону, считается «слабаком» или «цыпленком». Смысл игры заключается в создании напряжения, которое бы привело к устранению игрока. Подобная ситуация часто встречается в среде подростков или агрессивно настроенных молодых людей, хотя иногда несет в себе меньший риск. Еще одно из применений этой игры – ситуация, в которой две политические партии вступают в контакт, при котором они не могут ничего выиграть, и только гордость заставляет их сохранять противостояние. Партии медлят с уступками до тех пор, пока не дойдут до финальной точки. Возникающее психологическое напряжение может привести одного из игроков к неправильной стратегии поведения: если никто из игроков не уступает, то столкновение и фатальная развязка неизбежны.

Платежная матрица игры выглядит следующей:

	Уступить	**Не уступать**
Уступить	0, 0	-1, +1
Не уступать	+1, -1	-100, -100

2. Игра «коршун и голубь»

Игра «коршун и голубь» является биологическим примером игры. В этой версии двое игроков, обладающих неограниченными ресурсами, выбирают одну из двух стратегий поведения. Первая («голубь») заключается в том, что игрок демонстрирует свою силу, запугивая противника, а вторая («коршун») – в том, что игрок физически атакует противника. Если оба из игроков выбирают стратегию «коршуна», они сражаются, нанося друг другу увечья. Если один из игроков выбирает стратегию «коршуна», а второй «голубя» - то первый побеждает второго. В случае, если оба игрока – «голуби», то соперники приходит к компромиссу, получая выигрыш, который оказывается меньше, чем выигрыш «коршуна», побеждающего «голубя», как это следует из платежной матрицы этой игры.

	Коршун	**Голубь**
Коршун	1/2*(V-C), 1/2*(V-C)	V, 0
Голубь	0, V	V/2, V/2

Здесь V - цена соглашения, C - цена конфликта, причем $V<C$.

В игре «коршун и голубь» есть три точки равновесия по Нэшу:

1. первый игрок выбирает «коршуна», а второй «голубя».
2. первый игрок выбирает «голубя», а второй «коршуна».
3. оба игрока выбирают смешанную стратегию, в которой «коршун» выбирается с вероятностью *p*, а «голубь» - с вероятностью *1-p*.

2.2. Решение игры в чистых стратегиях

Пусть дана матрица игры (игра в нормальной записи):

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array},$$

где A и B – участники игры. Участник A выбирает стратегию. $i\,(i=1,\dots,m)$, а участник B выбирает стратегию $j\,(j=1,\dots,n)$. Стратегии выбираются участниками независимо друг от друга. Выбору соответствует исход $(i;\,j)$ с платежом a_{ij}. Он равен сумме выигрыша, который получает участника A и сумме проигрыша, который платит частник B. Естественным образом возникает вопрос: как найти лучшую стратегию для игрока A и для игрока B?

Понятие *наилучшего* (*оптимального*) решения является сложным понятием. Для того, чтобы утверждать, что какое-то решение является оптимальным, нужно знать, что именно мы понимаем под словом «оптимальный». Например, фирма, при выборе своих управленческих решений, может руководствоваться следующими соображениями:

- максимизация прибыли;
- минимизация издержек;
- завоевать место на рынке;
- стремиться к минимизации хозяйственных рисков;
- и др.

Каждое из этих соображений приводит к определенному *критерию оптимальности*. Решения, которые оптимальны с точки зрения одного критерия, могут быть неоптимальными с точки зрения другого. Например, если фирма выбрала в качестве критерия оптимальности принцип достижения наибольшей прибыли, то может оказаться, что решение, которое обеспечивает наибольшую прибыль, приводит к появлению высоких хозяйственных рисков.

Одним из критериев оптимальности является *критерий гарантированного результата*. Этот критерий заключается в том, что наилучшим решением (оптимальной стратегией) будет такое решение, которое даёт игроку определённый (гарантированный) выигрыш (или проигрыш) независимо от действий других участников игры.

В соответствии с критерием гарантированного результата игрок *A* для каждой своей стратегии $i\,(i=1,\ldots,m)$ находит наихудший для себя, а значит наилучший для соперника исход, т.е. игрок $A:\forall i\,(i=1,\ldots,m):\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij}=a_i$. Следовательно $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ – столбец самых плохих результатов. Далее игрок *A* выбирает такое значение *i*, которое соответствует $\max\limits_{1\le i\le m} a_i$. Иными словами, игрок *A* решает задачу $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ или задачу *максимина*.

Игрок *B* для каждой стратегии $j\,(j=1,\ldots,n)$ находит наихудший результат, т.е. находит $\max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}=b_j$. Следовательно получает строку $[b_1,b_2,\ldots,b_n]$. Далее игрок *B* решает задачу нахождения минимума $\min\limits_{1\le j\le n} b_j$. Другими словами, игрок *B* решает задачу нахождения $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ или задачу *минимакса*.

Значение $\alpha=\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ называется *нижним значением игры* (*нижняя цена игры*); значение $\beta=\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ называется *верхним значением игры* (*верхняя цена игры*).

Теорема 1. Для любой матричной игры выполняется неравенство

$$\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij} \qquad (1)$$

То есть нижняя цена игры не больше чем верхняя цена игры.

Доказательство.

Зафиксируем значение i=1,2…,m и найдем наименьший элемент строки $\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\}$, который обозначим $a_{il(i)}$. Таким образом

$$A: \forall i\,(i = 1, \ldots, m): \min_{1\le j\le n} a_{ij} = a_{i1} \qquad (2)$$

Обозначим $a_{kl(k)}$ наибольшее из чисел $\{a_{1l(1)}, a_{2l(2)}, \ldots, a_{ml(m)}\}$, тогда

$$a_{kl(k)} = \max_i \min_j a_{ij} \qquad (3)$$

Зафиксируем значение j=1,2…,n и найдем наибольший элемент столбца $\{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}\}$, который обозначим $a_{p(j)j}$. Таким образом

$$a_{p(j)j} = \max_{1\le i\le m} a_{ij} = b_j. \qquad (4)$$

Обозначим $a_{p(q)q}$ наименьшее из чисел $\{ a_{p(1)1}, a_{p(2)2}, \ldots, a_{p(n)n} \}$, тогда

$$a_{p(q)q} = \min_j \max_i a_{ij} \qquad (5)$$

Из (5) следует неравенство $a_{il(i)} \le a_{ij}$, верное для всех i=1.2….,m и j=1.2…,n. Подставляя в него i=k, получим неравенство

$$\alpha = a_{kl(k)} \le a_{kj} \qquad (6)$$

Из (1.5) следует неравенство $a_{p(j)j} \ge a_{ij}$, верное для всех i=1.2….,m и j=1.2…,n. Подставляя в него i=k, получим неравенство $a_{p(j)j} \ge a_{kj}$. Итак получаем

$\alpha = a_{kl(k)} \le a_{kj} \le a_{p(j)j} \le a_{p(q)q} = \beta$, что и требовалось доказать.

Если первый игрок стремится получить гарантированный результат, то он выбирает из своего множества стратегий стратегию *k*, для которой наименьшее значение выигрыша равно нижнему значению игры α. Тогда при любом выборе вторым игроком стратегии j будет верно неравенство $a_{ij} \geq \alpha$, то есть α является гарантированным выигрышем первого игрока.

Аналогично, если второй игрок стремится получит гарантированный результат, то он выберет стратегию q, для которой наибольшее значение проигрыша будет равно верхнему значению игры β. Тогда при любом выборе первым игроком стратегии i будет верно неравенство $a_{ij} \leq \beta$, то есть β является гарантированным верхним значением проигрыша второго игрока.

Будет ли исход игры, реализующийся при стратегиях k и q, равновесным зависит от того, равны или нет числа α и β.

Если верхняя цена равна нижней цены игры, т.е. выполняется равенство:

$$\alpha = \beta = \gamma \qquad (7)$$

то число γ называется *чистой ценой игры*.

Пусть платёжная матрица удовлетворяет уравнению (8). Это значит, что существует её элемент a_{lk}, для которого верно равенство

$$a_{lk} = \gamma \qquad (8)$$

Исход a_{lk} достигается, когда игрок *A* выбирает стратегию *l*, а игрок *B* – стратегию *k*. В этом случае стратегия *k* называется *оптимальной минимаксной стратегией* игрока B, а элемент a_{lk} называется *седловой точкой* (*седлом*) платёжной матрицы. Совокупность $\{\gamma, l, k\}$ (цена игры оптимальной стратегии) называется *решением игры в чистых стратегиях*.

Теорема 2. Если один участник игры выбирает свою оптимальную (максиминную/минимаксную) стратегию, то лучшим выбором для другого участника будет своя (минимаксная/максиминная) стратегия.

Доказательство. Пусть игрок А выбрал свою оптимальную стратегию l, тогда для любых стратегий j игрока В будет справедливо неравенство $a_{lj} \geq \alpha = \gamma$. Для оптимальной стратегии k игрока В будет выполняться неравенство $a_{lk} \leq \beta = \gamma$, следовательно для $j = k$ $a_{lk} = \gamma$, а для $j \neq k$ $a_{lk} \geq \gamma$. Из этого следует, что наилучшей стратегией для игрока В будет стратегия k. Аналогично доказывается обратная зависимость.

Итак, если платёжная матрица имеет седловую точку, то ни одному участнику игры не выгодно в одностороннем порядке отказываться от своей оптимальной (максиминной/минимаксной) стратегии. Другими словами, в ***седловой точке*** наблюдается баланс интересов, поэтому эту точку называют *точкой равновесия*.

Если платёжная матрица имеет седловую точку, то:

1) Игрок А имеет оптимальную максиминную стратегию;

2) Игрок В имеет минимаксную стратегию;

3) Применение оптимальных стратегий даёт ситуацию равновесия, которая оказывается ***равновесием в чистых стратегиях***.

4) Игра имеет решение $\{\gamma, l, k\}$, где $\gamma - \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$. l, k - оптимальные стратегии. $a_{lk} = \gamma$.

Пример**.** Найти решение игры.

	B					
A	16	-22	-7	14	-8	-22
	11	10	**8**	15	21	8
	6	-9	6	13	-13	-13
	2	6	-5	-3	4	-5
	16	10	8	15	21	

Решение. Игрок А руководствуясь принципом гарантированного результата. Для этого он в каждой строке ищет минимальный элемент, затем максимальное значение в полученном столбце минимумов

$$\max_{1\le i\le 4}\min_{1\le j\le 5} a_{ij} = \max\{-22{,}8{,}-15{,}-5\} = 8 \qquad \frac{l=2}{k=3}$$

Игрок В: $$\min_{1\le j\le 5}\max_{1\le i\le 5} a_{ij} = \min\{16{,}10{,}8{,}15{,}21\} = -8\,.$$

$\{8; A:2; B:3\}$ - решение в чистых стратегиях предопределяющее исход игры для различных игроков.

Если верхняя и нижняя цены игры принимают различные значения, то согласно теореме 1 справедливо строгое неравенство $\alpha<\beta$. В этом случае применение первым игроком максиминной стратегии дает возможность второму игроку сделать свой проигрыш меньшим, чем число β, если он откажется от минимаксной стратегии. И наоборот, применение вторым игроком минимаксной стратегии дает возможность первому игроку сделать выигрыш большим, чем число α, если он откажется от максиминной стратегии.

Тогда исход, который реализуется при максиминной и минимаксной стратегиях, не будет равновесным. Других равновесных исходов также не существует, следовательно, **игра без седловой точки не имеет решения в чистых стратегиях**.

Пример**.** Найти решение игры.

			В			
А	6	11	-5	**2**	8	-5
	17	-2	1	0	-15	-15
	-9	14	3	8	5	-9
	-1	-7	10	4	12	-7
	17	14	12	8	12	

Решение. $\alpha = -5; \quad \beta = 8; \quad \alpha < \beta$ Чистой цены не существует. Равновесия в чистых стратегиях нет.

Пример. В платёжной матрице найти точку равновесия.

1 \ 2	1	2	3	4	5	6	*min*
1	3	6	7	4	5	10	**3**
2	2	8	1	4	7	5	**1**
3	8	6	7	$\boxed{6}$	7	9	**6**
4	9	7	8	5	4	5	**4**
5	10	9	4	5	3	2	**3**
6	12	5	7	6	5	8	**5**
max	**12**	**9**	**7**	**6**	**7**	**10**	

Точкой равновесия будет являться точка **6**.

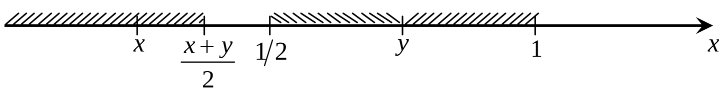
Пример. Посёлок Паново состоит из одной улицы. Два предпринимателя решили разместить свои киоски с продовольственными товарами. Других продовольственных магазинов в посёлке нет. Будем считать, что:

1. Оба киоска продают один и тот же ассортимент товаров по одним и тем же ценам;

2. Плотность жителей равномерно распределена по длине улицы.

Найти положение киосков, исходя из того, что каждый предприниматель стремится к наибольшей выручке.

Решение. Возьмём длину улицы за 1, тогда весь посёлок расположится на отрезке $[0;1]$:



Обозначим x – координата первого киоска; y – координата второго киоска. Очевидно, что $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ $y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Найдём выручку X первого киоска. Цену товара возьмём за 1.

$\frac{x+y}{2}$ – середина расстояния между x и y.

$$R_x = \frac{x+y}{2} \qquad R_y = 1 - \frac{x+y}{2} \qquad R_x + R_y = 1$$

Первый предприниматель решает задачу $R_x = \frac{x+y}{2} \to \max$,

а второй соответственно $R_y = \frac{x+y}{2} \to \min$.

Таким образом, получаем игру с постоянной суммой, равной 1.

Применим принцип гарантированного результата. Первый предприниматель ожидает, что второй будет выбирать такое значение y, чтобы выручка первого была минимальной, то есть он исходит из *пессимистических ожиданий*: $\min\limits_{\frac{1}{2} \le y \le 1} R_x$

1-й выбирает такой x, *чтобы* **:** $\max\limits_{0 \le x \le \frac{1}{2}} \min\limits_{\frac{1}{2} \le y \le 1} R_x$

2-й выбирает такой y, *чтобы:* $\max\limits_{\frac{1}{2} \le y \le 1} \min\limits_{0 \le x \le \frac{1}{2}} R_y$

Найдём оптимальные стратегии:

$$\max_{0 \le x \le \frac{1}{2}} \min_{\frac{1}{2} \le y \le 1} \left(\frac{x+y}{2}\right) = \max_{0 \le x \le \frac{1}{2}} \frac{x + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{1}{2}$$

Аналогично

$$\max_{\frac{1}{2}\le y\le 1}\ \min_{0\le x\le \frac{1}{2}}\left(1-\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{2};\quad y=\frac{1}{2}$$

Таким образом, лучшими стратегиями будет размещение киосков на середине улицы спиной друг к другу. Это равновесие не выгодно жителям посёлка, но обеспечивает равновесие между предпринимателями.

$$R_x=\frac{1}{2};\quad R_y=\frac{1}{2}$$

В примере два конкурента фактически борются за долю, превышающую $\frac{1}{2}$, т.е. за выигрыш

$$H(x;y)=\frac{x+y}{2}-\frac{1}{2},$$

где $H(x,y)$ – функция платежа,

если $H(x;y)>0$ – выигрыш x $\qquad H(x;y)<0$ – выигрыш y.

Равновесие: $H(x;y)=0$.

2.3. Пример решения матричной игры в чистых стратегиях

Рассмотрим пример решения матричной игры в чистых стратегиях, в условиях реальной экономики, в ситуации борьбы двух предприятий за рынок продукции региона.

Задача. Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе.

Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из трёх различных технологий. В зависимости от экологичности технологического процесса и качества продукции, произведённой по каждой технологии, предприятия могут установить цену единицы продукции на уровне 10, 6 и 2 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции. (табл. 1.1.).

Таблица 1.1

Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (д.е.).

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		Предприятие 1	Предприятие 2
I	10	5	8
II	6	3	4
III	2	1.5	1

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию:

$Y = 6 - 0.5 \cdot X$,

где Y – количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс. ед.), а X – средняя цена продукции предприятий, д.е.

Данные о спросе на продукцию в зависимости от цен реализации приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Спрос на продукцию в регионе, тыс. ед.

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Средняя цена реализации 1 ед. продукции, д.е.	Спрос на продукцию, тыс. ед.
Предприятие 1	Предприятие 2		
10	10	10	1

10	6	8	2
10	2	6	3
6	10	8	2
6	6	6	3
6	2	4	4
2	10	6	3
2	6	4	4
2	2	2	5

Значения долей продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена и значения вычислены (табл. 1.3.).

Таблица 1.3

Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предприятие 1	Предприятие 2	
10	10	0,31
10	6	0,33
10	2	0,18
6	10	0,7
6	6	0,3
6	2	0,2
2	10	0,92
2	6	0,85
2	2	0,72

По условию задачи на рынке региона действует только 2 предприятия. Поэтому долю продукции второго предприятия, приобретённой населением, в зависимости от соотношения цен на продукцию можно определить как единица минус доля первого предприятия.

Стратегиями предприятий в данной задаче являются их решения относительно технологий производства продукции. Эти решения определяют себестоимость и цену реализации единицы продукции. В задаче необходимо определить:

1. Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?

2. Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?

3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении?

Решение задачи

1. Определим экономический смысл коэффициентов выигрышей в платёжной матрице задачи. Каждое предприятие стремится к максимизации прибыли от производства продукции. Но кроме того, в данном случае предприятия ведут борьбу за рынок продукции в регионе. При этом выигрыш одного предприятия означает проигрыш другого. Такая задача может быть сведена к матричной игре с нулевой суммой. При этом коэффициентами выигрышей будут значения разницы прибыли предприятия 1 и предприятия 2 от производства продукции. В случае, если эта разница положительна, выигрывает предприятие 1, а в случае, если она отрицательна – предприятие 2.

2. Рассчитаем коэффициенты выигрышей платёжной матрицы. Для этого необходимо определить значения прибыли предприятия 1 и предприятия 2 от производства продукции. Прибыль предприятия в данной задаче зависит:

- от цены и себестоимости продукции;
- от количества продукции, приобретаемой населением региона;
- от доли продукции, приобретённой населением у предприятия.

Таким образом, значения разницы прибыли предприятий, соответствующие коэффициентам платёжной матрицы, необходимо определить по формуле (1):

$$D = p\cdot(S\cdot R1\text{-}S\cdot C1) – (1\text{-}p)\cdot(S\cdot R2\text{-}S\cdot C2) \qquad (1),$$

где D – значение разницы прибыли от производства продукции предприятия 1 и предприятия 2;

p - доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением региона;

S – количество продукции, приобретаемой населением региона;

$R1$ и $R2$ - цены реализации единицы продукции предприятиями 1 и 2;

$C1$ и $C2$ – полная себестоимость единицы продукции, произведённой на предприятиях 1 и 2.

Вычисление одного из коэффициентов платёжной матрицы.

Пусть, например, предприятие 1 принимает решение о производстве продукции в соответствии с технологией III, а предприятие 2 – в соответствии с технологией II. Тогда цена реализации единицы. продукции для предприятия 1 составит 2 д.е. при себестоимости единицы. продукции 1,5 д.е. Для предприятия 2 цена реализации единицы. продукции составит 6 д.е. при себестоимости 4 д.е. (табл. 1.1).

Количество продукции, которое население региона приобретёт при средней цене 4 д.е., равно 4 тыс. ед. (таблица 1.2). Доля продукции, которую население приобретёт у предприятия 1, составит 0,85, а у предприятия 2 – 0,15 (табл. 1.3). Вычислим коэффициент платёжной матрицы a_{32} по формуле (1):

a_{32} = 0,85·(4·2-4·1,5) – 0,15·(4·6-4·4) = 0,5 тыс. ед.

где i=3 – номер технологии первого предприятия, а j=2 – номер технологии второго предприятия.

Аналогично вычислим все коэффициенты платёжной матрицы. В платёжной матрице стратегии A_1 - A_3 -представляют собой решения о технологиях производства продукции предприятием 1, стратегии B_1 - B_3 – соответственно решения о технологиях производства продукции предприятием 2, коэффициенты выигрышей - разницу прибыли предприятия 1 и предприятия 2.

	B_1	B_2	B_3	Min_j
A_1	0,17	0,62	0,24	0.17
A_2	3	-1,5	-0,8	-1.5
A_3	0,9	0,5	$\boxed{0,4}$	0.4
Max_i	3	0.62	0.4	

Рис. 1. Платёжная матрица в игре «Борьба двух предприятий».

В данной матрице нет ни доминируемых, ни дублирующих стратегий. Это значит, что для обоих предприятий нет заведомо невыгодных технологий производства продукции. Определим минимальные элементы строк матрицы. Для предприятия 1 каждый из этих элементов имеет значение минимально гарантированного выигрыша при выборе соответствующей стратегии. Минимальные элементы матрицы по строкам имеют значения: 0,17, -1,5, 0,4.

Определим максимальные элементы столбцов матрицы. Для предприятия 2 каждый из этих элементов также имеет значение минимально гарантированного выигрыша при выборе соответствующей стратегии. Максимальные элементы матрицы по столбцам имеют значения: 3, 0,62, 0,4.

Нижняя цена игры в матрице равна 0,4. Верхняя цена игры также равна 0,4. Таким образом, нижняя и верхняя цена игры в матрице совпадают. Это значит, что имеется технология производства продукции, которая является оптимальной для обоих предприятий в условиях данной задачи. Эта технология III, которая соответствует стратегиям A_3 предприятия 1 и B_3 предприятия 2. Стратегии A_3 и B_3 – чистые оптимальные стратегии в данной задаче.

Значение разницы прибыли предприятия 1 и предприятия 2 при выборе чистой оптимальной стратегии положительно. Это означает, что предприятие 1 выиграет в данной игре. Выигрыш предприятия 1 составит 0,4 тыс. д.е. При этом на рынке будет реализовано 5 тыс. ед. продукции (реализация равна спросу на продукцию, таблица 1.2).. Оба предприятия установят цену за единицу продукции в 2 д.е. При этом для первого предприятия полная себестоимость единицы продукции составит 1,5 д.е., а для второго – 1 д.е (таблица 1.1). Предприятие 1 окажется в выигрыше лишь за счёт высокой доли продукции, которую приобретёт у него население.

2.4. Смешанное расширение игры

Пусть матричная игра представлена платежной матрицей с элементами a_{ij}, где $i=1,2,\ldots,m$ – стратегии первого игрока, $j=1,2,\ldots,n$ –

стратегии второго игрока. Данные стратегии игроков будем называть *чистыми стратегиями*.

В предыдущем параграфе было доказано, что решение матричной игры в чистых стратегиях (т.е. при выборе каждым игроком одной и только одной стратегии из заданного множества его стратегий) существует тогда и только тогда, когда платежная матрица имеет седловую точку.

Рассмотрим выбор стратегий в игре без седловой точки. Если игрок может предвидеть, какую из чистых стратегий изберёт противник, он может найти наилучший ответ на ход противника. Таким образом, каждый игрок заинтересован в том, чтобы его ходы были непредсказуемы. Для этого необходимо ввести в выбор стратегий элемент случайности. Однако отсутствие логики при выборе стратегий ухудшит положение каждого из игроков.

Компромисс заключается в том, что игроки чередуют (смешивают) свои стратегии случайным образом, но по определённой разумной схеме. Этой схеме должна соответствовать комбинация чистых стратегий.

Введем следующие изменения правил игры: каждый игрок наряду с отдельными стратегиями из своего множества стратегий может применять их комбинации, в которых стратегии представлены в определенных пропорциях.

Рассмотрим матричную игру, представленную следующей таблицей.

2-й игрок

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array} \\ \text{1-й игрок} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \end{array}$$

где x_1 - частота (вероятность) с которой первый игрок собирается использовать свою стратегию 1;

x_2 - частота (вероятность) с которой первый игрок собирается использовать свою стратегию 2;

x_m - частота (вероятность) с которой первый игрок собирается использовать свою стратегию m.

Вектор $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = x$ называют *смешанной стратегией* первого игрока. Из определения вероятности:

$$0 \le x_i \le 1 \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Аналогично второй игрок чередует (смешивает) свои стратегии так, чтобы:

Стратегия 1 имела частоту (вероятность) y_1;

Стратегия 2 имела частоту (вероятность) y_2;

………………………………………………

Стратегия n имела частоту (вероятность) y_n.

Вектор $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} = y$ называется *смешанной стратегией* второго игрока. Очевидно, что

$$0 \le y_j \le 1 \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Возможность применять наряду со стратегиями $i\,(i = 1, \ldots, m)$, и $j\,(j = 1, \ldots, n)$., которые мы будем называть *чистыми стратегиями* 1-го и 2-го игроков соответственно, *смешанных стратегий* x и y, изменяет условия игры, расширяет их. Поэтому переход от чистых стратегий к смешанным стратегиям называют *смешанным расширением игры*.

Множества смешанных стратегий 1-го и 2-го игроков представляют собой соответственно:

S_x – множество m-мерных векторов, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$0 \le x_i \le 1, \forall i = 1, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1;$$

S_y – множество n-мерных векторов, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$0 \le y_j \le 1, \forall j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Очевидно, что чистые стратегии игроков входят как элементы в множество их смешанных стратегий.

Пусть первый игрок выбрал некоторую смешанную стратегию x, а второй – y. Тогда каждый исход (i, j) из платёжной матрицы становится случайным событием. Найдём вероятность этого события. Для того, чтобы осуществился исход (i, j), первый игрок выбирает стратегию i с вероятностью x_i, а второй игрок выбирает стратегию j с вероятностью y_j. В силу независимости выбора вероятность исхода (i, j) равна вероятности совместных наступлений двух независимых событий, т.е. произведению их вероятностей $x_i\, y_j$.

Для каждой пары смешанных стратегий x€X и y€Y можно найти среднее значение выигрыша, которое мы обозначим $H(x, y)$. Это среднее значение будет равно математическому ожиданию платежа. Поскольку платёж a_{ij} осуществляется с вероятностью $x_i \times y_j$, то математическое ожидание определяется по формуле

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Легко проверить, что функция H(x,y) двух векторных переменных x и y будет непрерывна на компактном множестве S_x x S_y.

Очевидно, что первый игрок заинтересован в том, чтобы платёж $H(x, y)$ был как можно больше, а второй в том, чтобы платёж $H(x, y)$ был как можно меньше. В соответствии с принципом гарантированного результата 1-й игрок для каждой смешанной стратегии x из множества S_x определяет наименьшее по y значение функции H(x,y) на множестве S_y.

Наименьшее значение, которое обозначим H (x,y(x)) существует и достигается при y=y(x) в силу непрерывности функции H(x,y) на компактном ограниченном множестве S_y. Так же можно доказать, что функция y=y(x) является непрерывной по x на компактном множестве S_x.

Затем 1-й игрок находит значение векторного аргумента x^*, для которого функция H(x,y(x)) достигает максимума на множестве S_x. В силу непрерывности функции H(x,y(x)) на компактном ограниченном множестве S_x, она достигает там своего наибольшего значения

Число $\underline{v} = \max\limits_{x \in S_x} \min\limits_{y \in S_y} H(x, y)$ называется ***нижним значением игры*** в смешанных стратегиях. Число $\overline{v} = \min\limits_{y \in S_y} \max\limits_{x \in S_x} H(x, y)$ называется ***верхним значением игры в смешанных стратегиях***.

Теорема 3. Нижнее значение игры в смешанных стратегиях меньше или равно верхнему значению игры в смешанных стратегиях, т.е. справедливо неравенство

$$\underline{v} \le \overline{v}.$$

Доказательство

Зафиксируем смешанную стратегию x из множества S_x и обозначим H(x,y(x)) наименьшее значение функции H(x,y) на компактном ограниченном множестве S_y. Тогда для всех x из S_x и y из S_y выполняется неравенство

$H(x,y(x)) \le H(x,y)$ (1.1)

В соответствии с определением нижнее значение игры будет равно

$\underline{v} = \max\limits_{x\in S_x} \min\limits_{y\in S_y} H(x,y)$=$\max_x H(x,y(x))= H(x^*,y(x^*))$, (1.2)

где x^* - максиминная стратегия 1-го игрока.

Подставляя в неравенство (1.11) $x=x^*$, получим $H(x^*,y(x^*)) \le H(x^*,y)$, и с учетом (1.12), получим неравенство

$\underline{v} = \max\limits_{x\in S_x} \min\limits_{y\in S_y} H(x,y) \le H(x^*,y)$ для всех y из S_y. (1.3)

Зафиксируем смешанную стратегию y из множества S_y и обозначим $H(x(y),y)$ наибольшее значение функции $H(x,y)$ на компактном ограниченном множестве S_x. Тогда для всех x из S_x и y из S_y выполняется неравенство

$H(x(y),y) \ge H(x,y)$ (1.4)

В соответствии с определением нижнее значение игры будет равно

$\bar{v} = \min\limits_{y\in S_y} \max\limits_{x\in S_x} H(x,y)$=$\min_y H(x(y),y)= H(x(y^*),y^*)$ (1.5)

где y^* - минимаксная стратегия 2-го игрока.

Подставляя в неравенство (1.4) $y= y^*$, получим $H(x(y^*),y^*) \ge H(x,y^*)$, с учетом (1.5), получим неравенство

$\bar{v} = \min\limits_{y\in S_y} \max\limits_{x\in S_x} H(x,y) \ge H(x,y^*)$, (1.6)

верное для всех x из S_x.

Подставляя в неравенство (1.3) $y= y^*$, и в неравенство (1.16) $x=x^*$, получим неравенства

$\underline{v} = \max\limits_{x\in S_x} \min\limits_{y\in S_y} H(x,y) \le H(x^*,y^*)$ и $\bar{v} = \min\limits_{y\in S_y} \max\limits_{x\in S_x} H(x,y) \ge H(x^*,y^*)$,

откуда следует

$$\underline{v} = \max_{x\in S_x}\min_{y\in S_y} H(x, y) \le \mathrm{H}(\mathrm{x}^*,\mathrm{y}^*) \le \bar{v} = \min_{y\in S_y}\max_{x\in S_x} H(x, y) \quad (1.7)$$

Теорема доказана.

В соответствии с принципом гарантированного результата первый игрок ищет максиминную стратегию x^*, при которой его выигрыш будет не меньше, чем нижнее значение игры, т.е. для любых $y \in S_y$ выполняется неравенство

$$H(x^*, y) \ge \underline{v} = \max_{x\in S_x}\min_{y\in S_x} H(x, y) \quad (1.8)$$

Аналогично, второй игрок ищет минимаксную стратегию y^*, при которой его проигрыш будет не больше, чем верхнее значение игры, т.е. для любых $x \in S_x$ выполняется неравенство (1.9)

$$H(x, y^*) \le \bar{v} = \min_{y\in S_y}\max_{x\in S_x} H(x, y)$$

Для того, чтобы применение стратегий x^*, y^* давало игрокам гарантированные результаты, необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$H(x, y^*) \le H(x^*, y^*) \le H(x^*, y)$$

(1.10)

т.е., чтобы исход (x^*, y^*)был равновесным. Как доказано в теореме 3, для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$H(x^*, y^*) = \max_{x\in S_x}\min_{y\in S_y} H(x, y) = \min_{y\in S_y}\max_{x\in S_x} H(x, y)$$

(1.11)

то есть необходимо и достаточно, чтобы нижнее значение игры было равно верхнему значению игры $\underline{v} = \bar{v}$

(1.12)

Примем без доказательства теорему 4.

Теорема 4.

В любой матричной игре нижнее значение игры в смешанных стратегиях равно верхнему значению игры в смешанных стратегиях, т.е. $\underline{v} = \overline{v} = v$.

Теорема (4) доказывает существование решения матричной игры в смешанных стратегиях. Число v называется значением игры в смешанных стратегиях.

Равновесные стратегии x^* и y^* называют оптимальными стратегиями, имея в виду, что критерием оптимальности служит принцип гарантированного результата.

Совокупность v (значение игры) и x^*, y^* (оптимальные стратегии) называют *решением игры в смешанных стратегиях*.

Решение игры обладает следующими свойствами:

Свойство 1. Пусть $\alpha = \max\limits_{0 \le i \le m} \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$ – нижнее значение игры в чистых стратегиях, а $\underline{V} = \max\limits_{x} \min\limits_{y} H(x, y)$ – нижнее значение игры в смешанных стратегиях. Тогда

$$\alpha \le \underline{V}$$

Доказательство.

По определению $\alpha = \max\limits_{0 \le i \le m} \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$. Пусть максимум по i достигается при i=i˜, тогда для всех j=1.2…,n верно неравенство

$$\alpha \le a_{\tilde{i}j} \qquad (1.13)$$

Возьмем произвольную смешанную стратегию y={ y_1, y_2,…, y_n} из S_y. тогда справедливо $0 \le y_j \le 1, \forall j = 1, \ldots, n,$ $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1$. Умножим обе части неравенства (1.23) на $y_j \geq 0$ и просуммируем по индексу j от 1 до n, получим неравенство

$$\alpha \leq \sum a_{i\sim j}\, y_j \qquad (1.14)$$

Введем вектор $x^{\sim}=\{x^{\sim}_1, x^{\sim}_2,\dots, x^{\sim}_m\}$, где $x^{\sim}_i=1$, если $i= i^{\sim}$ и $x^{\sim}_i=0$, если $i \neq i^{\sim}$. Вектор $x^{\sim}$ удовлетворяет свойствам смешанной стратегии, поэтому положим, что $x^{\sim}$ принадлежит множеству S_x. Преобразуем правую часть неравенства (1):

$\sum a_{i\sim j}\, y_j=\sum\sum a_{i\sim j}\, x^{\sim}_i\, y_j =H(x^{\sim},y)$

Тогда из неравенства (1.14) следует, что для любой смешанной стратегии y из S_y справедливо неравенство

$$\alpha \leq H(x^{\sim},y) \qquad (1.15)$$

По определению $\underline{v} = \max\limits_{x\in S_x} \min\limits_{y\in S_y} H(x, y)$. Обозначим H(x,y(x)) наименьшее значение функции H(x,y) на множестве S_y, тогда для всех x из S_x будет верно неравенство

$\underline{v} = \max\limits_{x\in S_x} \min\limits_{y\in S_y} H(x, y) \geq H(x,y(x))$, подставляя в последнее неравенство $x=x^{\sim}$, получим

$$\underline{v} = \max_{x\in S_x} \min_{y\in S_y} H(x, y) \geq H(x^{\sim},y(x^{\sim})) \qquad (1.16)$$

В неравенство (1.25) подставим $y= y(x^{\sim})$, получим $\alpha \leq H(x^{\sim}, y(x^{\sim})$ (1.17)

Из неравенств (1.26) и (1.27) следует $\alpha \leq \underline{V}$., что и требовалось доказать

Свойство 2. Пусть $\beta = \min\limits_{1\leq j\leq n} \max\limits_{1\leq i\leq m} a_{ij}$ – верхнее значение игры в чистых стратегиях, а $\overline{V} = \min\limits_{y} \max\limits_{x} H(x, y)$ – верхнее значение игры в смешанных стратегиях. Тогда

$$\beta \geq \overline{V}$$

Доказывается аналогично свойству 1.

Свойство 3. Нижняя чистая цена игры и верхняя чистая цена игры ограничивают значение сверху и снизу значение игры в смешанных стратегиях: $\alpha \le V \le \beta$.

Доказательство следует из теоремы (4) и свойств (1) и (2).

Свойство 4. Если матричная игра имеет равновесие в чистых стратегиях, то чистое значение игры γ равно значению игры в смешанных стратегиях, то есть при $\alpha = \beta = \gamma$ будет справедливо

$$\gamma = V$$

Доказательство следует из свойства (3).

В случае, когда матричная игра имеет седловую точку, оптимальная смешанная стратегия первого игрока x^* будет иметь вид

$$x^* = \{0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0, 0\}.$$

И оптимальная смешанная стратегия 2-го игрока будет иметь вид

$$y^* = \{0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0, 0\}.$$

Таким образом, равновесия в чистых стратегиях является частным случаем равновесия в смешанных стратегиях.

2.5. Критерии принятия решения в условиях риска.

Лицо принимающее решение определяет наиболее выгодную стратегию в зависимости от целевой установки, которую он реализует в процессе решения задачи. Результат решения задачи лицом принимающим решение определяет по одному из критериев принятия решения. Для того, чтобы прийти к однозначному и по возможности наиболее выгодному варианту решению, необходимо ввести оценочную (целевую) функцию. При этом каждой стратегии лица принимающего решение (A_i) приписывается некоторый результат W_i, характеризующий все последствия этого решения. Из массива результатов принятия решений лицо принимающее решение выбирает элемент *W*, который наилучшим образом отражает мотивацию его поведения.

В зависимости от условий внешней среды и степени информативности лицом принимающим решение производится следующая классификация задач принятия решений:

а) в условиях риска;

б) в условиях неопределённости;

в) в условиях конфликта или противодействия (активного противника).

1. Критерий ожидаемого значения.

Использование критерия ожидаемого значения обусловлено стремлением максимизировать ожидаемую прибыль (или минимизировать ожидаемые затраты). Использование ожидаемых величин предполагает возможность многократного решения одной и той же задачи, пока не будут получены достаточно точные расчётные формулы. Математически это выглядит так: пусть X– случайная величина с математическим ожиданием MX и дисперсией DX. Если $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – значения случайной величины (с.в.) X, то среднее арифметическое их (выборочное среднее) значений $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ имеет дисперсию $\frac{DX}{n}$. Таким образом, когда $n \to \infty$

$$\frac{DX}{n} \to 0 \text{ и } \overline{x} \to MX.$$

Другими словами, при достаточно большом объёме выборки разница между средним арифметическим и математическим ожиданием стремится к нулю (так называемая предельная теорема теории вероятности). Следовательно, использование критерия ожидаемое значение справедливо только в случае, когда одно и тоже решение приходится применять достаточно большое число раз. Верно и обратное: ориентация на ожидания будет приводить к неверным результатам, для решений, которые приходится принимать небольшое число раз.

Пример 1. Требуется принять решение о том, когда необходимо проводить профилактический ремонт ПЭВМ, чтобы минимизировать потери из-за неисправности. В случае если ремонт будет производится слишком часто, затраты на обслуживание будут большими при малых потерях из-за случайных поломок.

Так как невозможно предсказать заранее, когда возникнет неисправность, необходимо найти вероятность того, что ПЭВМ выйдет из строя в период времени t. В этом и состоит элемент ”риска”.

Математически это выглядит так: ПЭВМ ремонтируется индивидуально, если она остановилась из-за поломки. Через T интервалов времени выполняется профилактический ремонт всех n ПЭВМ. Необходимо определить оптимальное значение T, при котором минимизируются общие затраты на ремонт неисправных ПЭВМ и проведение профилактического ремонта в расчёте на один интервал времени.

Пусть p_t – вероятность выхода из строя одной ПЭВМ в момент t, а n_t – случайная величина, равная числу всех вышедших из строя ПЭВМ в тот же момент. Пусть далее C_1 – затраты на ремонт неисправной ПЭВМ и C_2 – затраты на профилактический ремонт одной машины.

Применение критерия ожидаемого значения в данном случае оправдано, если ПЭВМ работают в течение большого периода времени. При этом ожидаемые затраты на один интервал составят

$$ОЗ = \frac{C_1 \sum_{t=1}^{T-1} M(n_t) + C_2 n}{T},$$

где $M(n_t)$ – математическое ожидание числа вышедших из строя ПЭВМ в момент t. Так как n_t имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p_t), то $M(n_t) = np_t$. Таким образом

$$ОЗ = \frac{n(C_1 \sum_{t=1}^{T-1} p_t + C_2)}{T}$$

Необходимые условия оптимальности T^* имеют вид:

$ОЗ\ (T^*-1) \geq ОЗ\ (T^*)$,

$ОЗ\ (T^*+1) \geq ОЗ\ (T^*)$.

Следовательно, начиная с малого значения T, вычисляют $ОЗ(T)$, пока не будут удовлетворены необходимые условия оптимальности.

Пусть $C_1 = 100$; $C_2 = 10$; $n = 50$. Значения p_t имеют вид:

T	p_t	$\sum_{t=1}^{T-1} p_t$	$ОЗ(T)$
1	0.05	0	$\frac{50\ (100 \cdot 0 + 10)}{1} = 500$
2	0.07	0.05	375
3	0.10	0.12	366.7
4	0.13	0.22	400
5	0.18	0.35	450

$T^* \rightarrow 3$, $ОЗ(T^*) \rightarrow 366.7$

Следовательно профилактический ремонт необходимо делать через $T^*=3$ интервала времени.

2. Критерий “ожидаемое значение – дисперсия”.

Критерий ожидаемого значения можно модифицировать так, что его можно будет применить и для редко повторяющихся ситуаций.

Если x – с. в. с дисперсией DX, то среднее арифметическое $\bar{x}$ имеет дисперсию DX/n, где n – число слогаемых в $\bar{x}$. Следовательно, если DX уменьшается, и вероятность того, что $\bar{x}$ близко к MX, увеличивается. Следовательно, целесообразно ввести критерий, в котором максимизация ожидаемого значения прибыли сочетается с минимизацией её дисперсии.

Пример 2. Применим критерий “ожидаемое значение – дисперсия” для примера 1. Для этого необходимо найти дисперсию затрат за один интервал времени, т.е. дисперсию

$$з_T = \frac{C_1\sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}$$

Т.к. n_t, $t = \overline{1, T-1}$ – с.в., то $з_T$ также с.в. С.в. n_t имеет биномиальное распределение с $M(n_t) = np_t$ и $D(n_t) = np_t(1–p_t)$. Следовательно,

$$D(з_T) = D\left(\frac{C_1\sum_{t=1}^{T-1} n_t + C_2 n}{T}\right) = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 D\left(\sum_{t=1}^{T-1} n_t\right) =$$

$$= \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} Dn_t = \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} np_t(1-p_t) = n\left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \left\{\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2\right\},$$

где $C_2 n = const$.

Из примера 1 следует, что

$M(з_T) = M(з(T))$.

Следовательно, искомым критерием будет минимум выражения

$M(з(T)) + к\, D(з_T)$.

Замечание. Константу “$к$” можно рассматривать как уровень <u>не склонности к риску</u>, т.к. “$к$” определяет “степень возможности” дисперсии $Д(з_T)$ по отношению к математическому ожиданию. Например, если предприниматель, особенно остро реагирует на большие отрицательные отклонения прибыли вниз от $M(з(T))$, то он может выбрать “$к$” много больше 1. Это придаёт больший вес дисперсии и приводит к решению, уменьшающему вероятность больших потерь прибыли.

При $к=1$ получаем задачу

$$M(З(T))+D(З(T))=n\left\{\left(\frac{C_1}{T}+\frac{C_1^2}{T^2}\right)\sum_{t=1}^{T-1}p_t-\left(\frac{C_1}{T}\right)^2\sum_{t=1}^{T-1}p_t^2+\frac{C^2}{T}\right\}$$

По данным из примера 1 можно составить следующую таблицу

T	p_t	p_t^2	$\sum_{t=1}^{T-1}p_t$	$\sum_{t=1}^{T-1}p_t^2$	$M(з(T))+D(з($
1	0.05	0.00 25	0	0	500.00
2	0.07	0.00 49	0.05	0.00 25	6312.50
3	0.10	0.01 00	0.12	0.00 74	6622.22
4	0.13	0.01 69	0.22	0.01 74	6731.25
5	0.18	0.03 24	0.35	0.03 43	6764.00

Из таблицы видно, что профилактический ремонт необходимо делать в течение каждого интервала $T^*=1$.

3. Критерий предельного уровня

Критерий предельного уровня не дает оптимального решения, максимизирующего, например, прибыль или минимизирующего затраты. Скорее он соответствует определению приемлемого способа действий.

Пример 3. Предположим, что величина спроса x в единицу времени (интенсивность спроса) на некоторый товар задаётся непрерывной функцией распределения $f(x)$. Если запасы в начальный момент невелики, в дальнейшем возможен дефицит товара. В противном случае к концу рассматриваемого периода запасы нереализованного товара могут оказаться очень большими. В обоих случаях возможны потери.

Т.к. определить потери от дефицита очень трудно, ЛПР может установить необходимый уровень запасов таким образом, чтобы величина ожидаемого дефицита не превышала A_1 единиц, а величина ожидаемых излишков не превышала A_2 единиц. Иными словами, пусть I – искомый уровень запасов. Тогда

ожидаемый дефицит = $\int_I^{\infty}(x-I)f(x)dx \le A_1$,

ожидаемые излишки = $\int_0^I (I-x)f(x)dx \le A_2$.

При произвольном выборе A_1 и A_2 указанные условия могут оказаться противоречивыми. В этом случае необходимо ослабить одно из ограничений, чтобы обеспечить допустимость.

Пусть, например,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{20}{x^2},\ если\ 10 \le x \le 20,\\ 0\ ,\ если\ x \le 10\ или\ x \ge 20.\end{cases}$$

Тогда

$$\int_I^{20}(x-I)f(x)dx = \int_I^{20}(x-I)\frac{20}{x^2}dx = 20(\ln\frac{20}{I}+\frac{I}{20}-1)$$

$$\int_{10}^{I}(I-x)f(x)dx = \int_{10}^{I}(I-x)\frac{20}{x^2}dx = 20(\ln\frac{10}{I}+\frac{I}{10}-1)$$

Применение критерия предельного уровня приводит к неравенствам

$$ln\ I - \frac{I}{20} \ge ln\ 20 - \frac{A_1}{20} - 1 = 1.996 - \frac{A_1}{20}$$

$$ln\ I - \frac{I}{10} \ge ln\ 10 - \frac{A_2}{20} - 1 = 1.302 - \frac{A_2}{20}$$

Предельные значения A_1 и A_2 должны быть выбраны так, что бы оба неравенства выполнялись хотя бы для одного значения I.

Например, если $A_1 = 2$ и $A_2 = 4$, неравенства принимают вид

$$\ln I - \frac{I}{20} \geq 1.896$$

$$\ln I - \frac{I}{10} \geq 1.102$$

Значение I должно находиться между 10 и 20, т.к. именно в этих пределах изменяется спрос. Из таблицы видно, что оба условия выполняются для I, из интервала (13,17)

I	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\ln I - \frac{I}{20}$	1.8	1.8	1.8	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
$\ln I - \frac{I}{10}$	1.3	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.1	1.1	1.0	1.0	0.9

Любое из этих значений удовлетворяет условиям задачи.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение матричной игры.

2. Каким образом строится платежная матрица в матричной игре?

3.Каковы цели игроков в матричной игре?

4.Дайте определения верхней и нижней цен игры.

5.Какая ситуация в игре называется равновесной?

6.Какие стратегии называются оптимальными?

7.Что произойдет, если игроки отклонятся от оптимальных стратегий?

8.Какая игра называется «матричной игрой с седловой точкой»?

9.Дайте определение смешанных стратегий. Как их можно представить?

10.На какой вопрос отвечает основная теорема теории матричных игр?

11.Назовите пять условий применения смешанной стратегии.

12.Приведите алгоритм решения матричной игры22´.

13.Какие ситуации возможны при решении матричной игры 2n´?

14.Каким образом можно уменьшить платежную матрицу?

15. Какая игра называется игрой с нулевой суммой?

16. Сколько активных игроков в парной игре с нулевой суммой?

17. От чего зависит размерность платежной матрицы парной игры с нулевой суммой?

18. Что собой представляет элемент платежной матрицы?

19. Как найти нижнюю и верхнюю цены парной игры с нулевой суммой?

20. Каким соотношением связаны нижняя и верхняя цена игры?

21. Какая игра называется игрой с седловой точкой?

22. Как определяются оптимальные стратегии игроков в игре с седловой точкой?

23. Для чего выполняют доминирование стратегий?

24. Как определить, доминирует ли одна стратегия другую?

ГЛАВА 3. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

3.1. Игры с природой. Матрица рисков.

Игра с природой - это парная матричная игра, в которой сознательный игрок выступает против участника безразличного к результату игры. Такого участника называют природой. В подобных играх решение заключается в отыскании оптимальной стратегии первого игрока. Состояния природы реализуются под воздействием многих случайных и неслучайных факторов и в рекомендациях природа не нуждается. Платежная матрица формируется из выигрышей сознательного игрока.

Природа в этой игре не проигрывает, она позволяет или не позволяет получить в результате определенной стратегии в бизнесе, инвестировании и т. п. некий выигрыш сознательному игроку. Чистые стратегии сознательного игрока: A_1 A_2 , , , A m .

Природа обладает состояниями: N_1 N_2 , , , N n.

Смысл игры против природы состоит не в том, что игрок вредит окружающей среде, и не в том, что природа враждебна игроку, а в том, что игрок выбирает своё решение, не зная состояния внешней среды, от которых зависит его выигрыш, т.е. в условиях неопределённости. Эта неопределённость вызвана внешними случайными факторами – природными, социальными, техническими, политическими, экономическими. Всю совокупность перечисленных случайных факторов принято называть природой (Nature).

Предположим, что экономический субъект выбирает свои стратегии из некоторого множества $1, 2, \ldots, m$. Он знает, что внешний мир (природа), независимо от его действий, может находиться в одном из состояний $1, 2, \ldots, n$. Эти состояния можно условно считать стратегиями природы.

Каждое из состояний природы в сочетании со стратегией экономического субъекта (игрока) приводит к определённым исходам. Каждый исход оценивается игроком в зависимости от полезности для него этого исхода. Таким образом, множество исходов и заданная на них функция полезности экономического субъекта задают платёжную матрицу с элементами a_{ij} – выигрыш (полезность) экономического субъекта при выборе им стратегии i и состоянии природы j.

Следовательно, игра против природы является частным случаем матричной игры. Её особенность состоит в том, что второй игрок (природа) не преследует собственные цели, то есть является безразличным игроком. Стратегии природы являются ее возможными состояниями, определяемыми объективными законами, а также случайными, неизвестными игроку факторами. То, что у природы нет собственных интересов, отнюдь не облегчает задачу принятия решений, потому что в игре против природы нельзя предусмотреть ее стратегии, исходя из ее «интересов».

Модели выбора решения в игре против природы делятся на два типа.

Во-первых, это модели выбора при определенном *критерии оптимальности*, применяемые в тех случаях, когда смысл задачи не дает возможности игроку использовать смешанные стратегии.

Во-вторых, это модели с использованием смешанных стратегий.

В рассматриваемых ранее стратегических играх принимают участие противоборствующие стороны. Однако имеется обширный класс задач, в которых неопределенность, сопровождающая любое действие, не связана с сознательным противодействием противника, а зависит от некой, не известной игроку I объективной действительности (природы). Такого рода ситуации принято называть играми с природой. Природа (игрок II) рассматривается при этом как некая незаинтересованная инстанция, которая не выбирает для себя оптимальных стратегий. Возможные состояния природы (ее стратегии) реализуются случайным образом. Часто задачи такого рода называют задачами теории статистических решений.

Рассмотрим игровую постановку задачи принятия решения в условиях неопределенности. Пусть первому игроку (ЛПР) необходимо выполнить операцию в недостаточно известной обстановке, относительно состояний которой можно сделать n предположений. Эти предположения П1, П2,..., Пn рассматриваются как стратегии природы. Первый игрок может использовать m возможных стратегий - $A_1, A_2, ..., A_m$. Выигрыши игрока I a_{ij} при каждой паре стратегий A_i и Π_j предполагаются известными и задаются платежной матрицей $A = \|a_{ij}\|$.

Цель первого игрока (ЛПР) - определение такой стратегии (чистой или смешанной), которая обеспечила бы ему наибольший выигрыш.

При рассмотрении задачи игры с природой целесообразно не только оценить выигрыш при той или иной игровой ситуации, но и определить разность между максимально возможным выигрышем при данном состоянии природы и выигрышем, который будет получен при применении стратегии A_i в тех же условиях. Эта разность в теории игр называется ***риском***.

Максимальный выигрыш в j-м столбце обозначается через β_j, ($\beta = \max_i a_{ij}$). Риск игрока r_{ij} при применении им стратегии A_i в условиях Π_j равен $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, ($r_{ij} \geq 0$).

Матрица рисков $R = (r_{ij})_{m\,x\,n}$ часто позволяет лучше охарактеризовать неопределенную ситуацию, чем матрица выигрышей.

Критерии, основанные на известных вероятностях стратегий природы.

Иногда неопределенность ситуации удается в некоторой степени ослабить с помощью нахождения вероятностей состояний на базе данных статистических наблюдений.

Пусть вероятности состояний природы известны:

$$P(\Pi_1) = q_1; P(\Pi_2) = q_2; ...; P(\Pi_n) = q_n.$$

Если α_i - среднее значение (математическое ожидание) выигрыша, которое игрок I стремится максимизировать, то

$$a_i = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + ... + a_{in}q_n \ , \ \ i = \overline{1,m}.$$

В качестве оптимальной стратегии выбирается та из стратегий A_i , $i = \overline{1,m}$, которая соответствует максимальному среднему значению выигрыша: $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max\limits_i \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\}$.

Оптимальную стратегию при известных вероятностях состояний природы можно найти, используя показатель риска. Для этого необходимо определить среднее значение риска:

$$r_i = r_{i1}q_1 + r_{i2}q_2 + ... + r_{in}q_n \ , \ i = \overline{1,m}.$$

В качестве оптимальной стратегии в данном случае выбирается та, которая обеспечивает минимальное среднее значение риска:

$$r = \min_i r_i = \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \right\}.$$

Легко показать, что применение критериев ***среднего выигрыша*** и ***среднего риска*** для одних и тех же исходных данных приводит к одному и тому же результату, т.е. оптимальная стратегия, полученная при применении критерия оптимизации среднего выигрыша, совпадает с оптимальной стратегией, полученной по критерию минимизации среднего риска.

Чрезвычайно существенно то обстоятельство, что в случае известных вероятностей состояний природы $q_1, q_2, ..., q_n$, игроку I нет смысла пользоваться смешанными стратегиями.

Предыдущее рассмотрение относилось к случаю, когда вероятности состояний природы известны. Если объективные оценки вероятностей состояний получить невозможно, то они могут быть оценены субъективно на основе:

- принципа недостаточного основания Лапласа который применяется $q_1 = q_2 = ... = q_n = \frac{1}{n}$,

тогда, когда ни одно состояние природы нельзя предпочесть другому;

- убывающей арифметической прогрессии - в том случае, если можно расположить состояния природы в порядке убывания их правдоподобности (вероятности свершения)

$$q_1 : q_2 : ...q_n,$$

где

$$q_j = \frac{2(n-j+1)}{n(n+1)}, \quad j = 1,2,...,n,$$

- использования оценки группы экспертов (например, в случае, когда необходимо оценить вероятности различных погодных условий, можно использовать данные метеорологических наблюдений за длительный период времени).

Рассмотрим использование информационных технологий поиска оптимальных стратегий в играх с природой для случая известных вероятностей ее состояний.

3.2. Критерии, используемые для принятия решений в играх с природой

3.2.1. Классические критерии принятия решений.

1. Правило максимакса – максимизация максимума доходов. Каждому из вариантов в приведенной таблице соответствуют следующие максимальные доходы: $B_1 \rightarrow 5$, $B_2 \rightarrow 8$, $B_3 \rightarrow 4$. По данному правилу максимально возможный доход 8, при этом игнорируются возможные потери. Огромен риск. Математическое выражение:

$$\alpha = \max_i \min_j Э_{ij}$$

2. Минимаксный критерий.

Правило выбора решения в соответствии с минимаксным критерием (ММ-критерием) можно интерпретировать следующим образом:
матрица решений дополняется ещё одним столбцом из наименьших результатов e_{ir} каждой строки. Необходимо выбрать те варианты в строках которых стоят наибольшее значение e_{ir} этого столбца.

Выбранные т.о. варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Это свойство позволяет считать ММ-критерий одним из фундаментальных.

Применение ММ-критерия бывает оправдано, если ситуация, в которой принимается решение следующая:

1. О возможности появления внешних состояний F_j ничего не известно;
2. Приходится считаться с появлением различных внешних состояний F_j;
3. Решение реализуется только один раз;
4. Необходимо исключить какой бы то ни было риск.

3.2.2. Критерии оптимальности решения в условиях неопределённости

Рассмотрим задачу принятия решения, когда на стадии принятия решения лицо принимающее решение знает:

а) возможные состояния среды: $y_1, y_2,..y_n \in Y$ – множество состояний окружающей среды.

б) результат, к которому приведёт выбор альтернативы $x \in X$ для каждого возможного состояния среды: $y_1, y_2,..y_n$, т. е. знает функцию выигрыша (проигрыша): $f(x,y)$ для всех $x \in X$, $y = Y$.

X – множество альтернатив

Y – множество состояний среды

При этом лицо принимающее решение не располагает информацией о том, как распределены вероятности состояний среды и даже не знает, какие из этих состояний более вероятны. Такая ситуация принятия решений определяется как структурная неопределённость.

Задача выбора «наилучшего» решения требует определить критерий оптимальности. Очевидно, что широкое разнообразие жизненных и экономических ситуаций не может быть описано с помощью единственного критерия оптимальности, в математических моделях принятия решения предложены и исследованы несколько критериев оптимальности.

Сформулируем определение – что из себя должен представлять критерий оптимальности?

Для этого определения выделим следующие моменты:

1. Любой критерий оптимальности основан на определённых предположениях (гипотезах) о поведении окружающей среды.

2. Критерий оптимальности представляет собой правило выбора «наилучшего» решения.

Таким образом, критерий оптимальности – это правило выбора «наилучшего» решения в условиях неопределённости, основанное на определённых предположениях относительно поведения окружающей среды и предпочтений лица принимающего решение .

При этом желательно, чтобы критерий оптимальности обладал свойствами, согласующимися со здравым смыслом и рациональностью. Чтобы пояснить, в чем состоит в данном случае рациональный подход, вспомним понятие *доминируемости*.

Пусть задача принятия решения характеризуется n-состояниями среды: $y_1, y_2,..y_n$ и предусматривает выбор из m-альтернатив: $x_1, x_2,..x_m$. Причём для каждой пары (x_i, y_j) определено значение функции $f(x_i, y_j)$.

Тогда задачу принятия решения можно описать с помощью платёжной матрицы :

Состояния среды Альтернативы	y_1	y_2	…	y_j	…	y_n
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	…	$f(x_1,y_j)$	…	$f(x_1,y_n)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	…	$f(x_2,y_j)$	…	$f(x_2,y_n)$
…	…	…	…	…	…	…
x_i	$f(x_i,y_1)$	$f(x_i,y_2)$	…	$f(x_i,y_j)$	…	$f(x_i,y_n)$
…	…	…	…	…	…	…
x_m	$f(x_m,y_1)$	$f(x_m,y_2)$	…	$f(x_m,y_j)$	…	$f(x_m,y_n)$

Предположим, что для некоторых целых чисел i и k Є [1,m] выполняется условие: для любого j $f(x_i,y_j) \geq f(x_k,y_j)$.

В строке i результаты больше, чем в строке k. Следовательно, стратегия x_i доминирует стратегию x_k, x_k – доминируемая стратегия.

Очевидно, что доминируемые стратегии (или альтернативы) заведомо хуже других, а доминирующие заведомо лучше. Отсюда следует, что первый принцип, которому должен удовлетворять критерий оптимальности, это принцип доминирования.

a) Принцип доминирования:

- если существует доминирующая стратегия, то критерий оптимальности должен обеспечивать выбор именно этой стратегии;
- если существуют доминируемые стратегии, то их удаление и введение не должно влиять на выбор наилучшей стратегии.

Так же очевиден смысл двух других принципов:

b) Перенумерация альтернатив (нумерация строк) и/или состояний среды (нумерация столбцов) не должна влиять на выбор наилучшей стратегии.

c) Предположим, что ко всем значениям функции выигрыша добавлено число a: $f(x_i,y_j) + a$. Очевидно, что критерий оптимальности должен обеспечивать выбор наилучшей стратегии, которая не зависит от прибавления аддитивной постоянной к функции выигрыша.

Рассмотрим наиболее часто применяемые критерии оптимальности.

3.2.2.1. Критерий Лапласа

Критерий Лапласа основан на гипотезе, согласно которой все состояния среды реализуются с одинаковыми вероятностями.

Если возможна реализация 2-х состояний A и B и нет никакой информации об их вероятностях, то естественно предполагать, что:

$P(A) = P(B) = ½$.

Если среда может принимать состояния y_1, y_2,..y_n и нет информации о вероятностях этих значений, то естественно предполагать:

$P(y_1) = P(y_2) = \ldots = P(y_n) = 1/n$.

Пусть для задачи принятия решения, заданной Таблицей 1, принята гипотеза равной возможности. Для каждой стратегии x_i определим значение функции $L(x_i)$:

$L(x_i) = 1/n*\sum f(x_i,y_j)$

Получим $L(x_1)$, $L(x_2)$,.. $L(x_n)$ – среднеарифметические выигрыши для каждой стратегии.

Выбираемая стратегия x_i: $L(x_l) \geq L(x_i)$

Пример: Найти наилучшую стратегию по критерию Лапласа для задачи принятия решения, заданной следующей платёжной матрицей:

Платёжная матрица

	y_1	y_2	$У_3$	$L(x_i)$
x_1	92	0	4	96/3=32
x_2	30	50	10	90/3=30

Легко показать, что критерий Лапласа удовлетворяет всем необходимым условиям.

Тем не менее, у критерия Лапласа есть недостаток: по критерию Лапласа может быть выбрана рискованная стратегия.

Маленькие значения выигрыша при нахождении среднего перекрываются большими – эффект компенсации.

3.2.2.2. Критерий Вальда (максиминный критерий)

Выбор критерия Вальда основан на гипотезе, согласно которой ЛПР стремится получить гарантированный результат при любом состоянии среды.

Пример: Найти наилучшую стратегию по критерию Вальда для задачи принятия решения, заданной следующей платёжной матрицей:

Платёжная матрица

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_i
x_1	1	3	2	4	5	1
x_2	0	6	8	10	12	0

Решение. Найдём выбор по принципу максимина: для любого i $\min f(x_i,y_j) = a_i$ – худший результат при выборе i.

$$\max\min f(x_i,y_j) = \max a_i = K.$$

Легко показать, что критерий Вальда удовлетворяет всем 3-м условиям, определённым в пункте 2.1.1.

Недостаток этого критерия: критерий Вальда отвергает хорошие гипотезы из-за своего крайнего пессимизма.

3.2.2.3. Критерий Гурвица (критерий взвешенного оптимизма /пессимизма)

В основе этого критерия лежит гипотеза о том, что уровень пессимизма ЛПР принимает некоторое значение α: $0 \le \alpha \le 1$. Чем больше α, тем пессимистичнее настроен ЛПР. Для каждой строки x_i определяется:

- число $a_i = \min f((x_i,y_j)$;

- число $b_i = \max f((x_i,y_j)$.

Затем для каждого значения x_i и α рассчитывается число:

$H(x_i, \alpha) = \alpha * a_i + (1- \alpha) * b_i$

и выбирается $\max H(x_i, \alpha) = h(\alpha)$.

Пример: Найти наилучшую стратегию по критерию Гурвица, при значении α = ½ заданную следующей платёжной матрицей:

Платёжная матрица

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_i	b_i	$H_i(1/2)$
1	1	3	2	4	5	1	5	1*1/2+5*1/2=3
2	0	6	8	10	12	0	12	0*1/2+12*1/2=6

Очевидно, что если $\alpha = 1$, то критерий Гурвица превращается в критерий Вальда.

Докажем, что критерий Гурвица удовлетворяет принципу доминирования.

Доказательство. Пусть стратегия x_i является доминирующей. Это значит, что для всех j, $1 \le j \le n$ и для всех k, $1 \le k \le m$, $k \ne j$, выполняется неравенство:

$$f(x_i,y_j) \ge f(x_k,y_j). \qquad (1)$$

Из этого следует, что:

$max\ f(x_i,y_j) \ge max\ f(x_k,y_j).$ *(*)*

Докажем выполнение неравенства *(*)* подробнее:

$max\ f(x_i,y_j) = f(x_i,y_p)$

$max\ f(x_k,y_j) = f(x_k,y_q)$

$f(x_i,y_j) \le f(x_i,y_p)$

$f(x_k,y_j) \le f(x_k,y_q)$

Из *(1)* следует, что $f(x_k,y_q) \le f(x_i,y_q) \le f(x_i,y_p)$.

Таким образом, получается $b_k \le b_i$.

Введём обозначения: $min\ f(x_i,y_j) = a_i = f(x_i,y_l)$,

$$min\ f(x_k,y_j) = a_k = f(x_k,y_r)$$

Из неравенства доминирования *(d)* следует, что $f(x_k,y_p) \leq f(x_i,y_r)$

$a_i = f(x_i,y_l) \geq f(x_k,y_l) \geq \min f(x_k,y_l) = a_k$

$a_i \geq a_k$

Так как $\alpha \geq 0$, $1- \alpha \geq 0$, то:

$\alpha * a_i \geq \alpha * a_k$

$(1- \alpha)* b_i \geq (1- \alpha)* b_k$

Выполнение условий перестановки и аддитивной постоянной достаточно очевидно.

Недостаток критерия Гурвица: недостаточная обоснованность выбора параметра α (его значение основано на оценке отношения ЛПР к риску).

3.2.2.4. Критерий Байеса – Лапласа

Обозначим через q_i – вероятность появления внешнего состояния F_j.

Соответствующее правило выбора можно интерпретировать следующим образом:

матрица решений $\| e_{ij} \|$ дополняется ещё одним столбцом содержащим математическое ожидание значений каждой из строк. Выбираются те варианты, в строках которых стоит наибольшее значение e_{ir} этого столбца.

При этом предполагается, что ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

1. Вероятности появления состояния F_j известны и не зависят от времени.
2. Решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз.
3. Для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск практически исключён.

Таким образом, критерий Байеса-Лапласа (B-L-критерий) более оптимистичен, чем минимаксный критерий, однако он предполагает большую информированность и достаточно длительную реализацию.

3.2.2.5. Критерий Сэвиджа

Правило минимакса – минимизация максимально возможных потерь или критерий минимаксного риска Сэвиджа. При использовании данного правила больше внимания уделяется возможным потерям, что, в свою очередь, обеспечивает наименьшее значение максимальной величины риска:

$$R_s = \min_i \max_j r_{ij},$$

где r_{ij} – риск определяется выражением:

$$r_{ij} = \max_i Э_{ij} - Э_{ij}$$

где $\max_i Э_{ij}$ – максимально возможный выигрыш по i-му варианту;

$Э_{ij}$ - номинальный размер эффекта.

Так, например, риск (ущерб) по варианту B_1 в ситуации S_3 составит: 5 - 3 = 2.

Результаты расчетов риска по каждой ситуации альтернативных решений для целевого примера табл. 2 приведен в табл. 3.

Таблица 3

Матрица рисков (ущербов) по вариантам альтернативных решений (условия табл. 2)

Вариант	Ситуация (S_j)

решения (B_i)	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
B_1	4	3	2	0	0
B_2	6	7	3	0	1
B_3	1	0	0	2	2

Теперь по каждому варианту выбираем максимальный ущерб: $B_1 \to 4$, $B_2 \to 7$, $B_3 \to 2$. Лучшим оказывается вариант B_3 (ущерб равен 2), т.е. выбирается то решение, которое ведет к минимальному значению максимальных потерь.

Таким образом правило минимакса (Сэвиджа), как и правило максимина (Вальда) – это правило крайнего пессимизма, который проявляется в минимизации максимальных потерь.

$$a_{ij} := \max_i e_{ij} - e_{ij}$$

$$e_{ir} := \max_i a_{ij} = \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij})$$

Величину a_{ij} можно трактовать как максимальный дополнительный выигрыш, который достигается, если в состоянии F_j вместо варианта E_i выбирать другой, оптимальный для этого внешнего состояния вариант. Величину a_{ij} можно интерпретировать и как потери (штрафы) возникающие в состоянии F_j при замене оптимального для него варианта на вариант E_i. В последнем случае e_{ir} представляет собой максимально возможные (по всем внешним состояниям F_j , $j = \overline{1, n}$) потери в случае выбора варианта E_i.

Соответствующее критерию Сэвиджа правило выбора теперь трактуется так:

1). Каждый элемент матрицы решений $\| e_{ij} \|$ вычитается из наибольшего результата max e_{ij} соответствующего столбца.

2). Разности a_{ij} образуют матрицу остатков $\| e_{ij} \|$. Эта матрица пополняется столбцом наибольших разностей e_{ir}. Выбирают те варианты, в строках которых стоит наименьшее для этого столбца значение.

Требования, предъявляемые к ситуации, в которой принимается решение, совпадают с требованием к ММ-критерию.

3.2.2.6. Примеры теоретико-игровых моделей

Из требований, предъявляемых к рассмотренным критериям становится ясно, что в следствии их жёстких исходных позиций они применимы только для идеализированных практических решений. В случае, когда возможна слишком сильная идеализация, можно применять одновременно поочерёдно различные критерии. После этого среди нескольких вариантов ЛПР волевым методом выбирает окончательное решение. Такой подход позволяет, во-первых, лучше проникнуть во все внутренние связи проблемы принятия решений и, во-вторых, ослабляет влияние субъективного фактора.

Пример. При работе ЭВМ необходимо периодически приостанавливать обработку информации и проверять ЭВМ на наличие в ней вирусов. Приостановка в обработке информации приводит к определённым экономическим издержкам. В случае же если вирус вовремя обнаружен не будет, возможна потеря и некоторой части информации, что приведёт и ещё к большим убыткам.

Варианты решения таковы:

E_1– полная проверка;

E_2– минимальная проверка;

E_3– отказ от проверки.

ЭВМ может находиться в следующих состояниях:

F_1– вирус отсутствует;

F_2– вирус есть, но он не успел повредить информацию;

F_3– есть файлы, нуждающиеся в восстановлении.

Результаты, включающие затраты на поиск вируса и его ликвидацию, а также затраты, связанные с восстановлением информации имеют вид:

				MM-критерий		критерий B-L	
	F_1	F_2	F_3	$e_{ir}=\min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$	$e_{ir}=\sum\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$
E_1	-20.0	-22.0	-25.0	-25.0	-25.0	-22.33	
E_2	-14.0	-23.0	-31.0	-31.0		-22.67	
E_3	0	-24.0	-40.0	-40.0		-21.33	-21.33

Согласно ММ-критерию следует проводить полную проверку. Критерий Байеса-Лапласа, в предположении, что все состояния машины равновероятны.

$P(F_j) = q_j = 0.33,$

рекомендуется отказаться от проверки. Матрица остатков для этого примера и их оценка (в тысячах) согласно критерию Сэвиджа имеет вид:

				Критерий Сэвиджа	
	F_1	F_2	F_3	$e_{ir}=\min\limits_j a_{ij}$	$\min\limits_j e_{ir}$
E_1	+20.0	0	0	+20.0	
E_2	+14.0	+1.0	+6.0	+14.0	+14.0
E_3	0	+2.0	+15.0	+15.0	

Пример специально подобран так, что каждый критерий предлагает новое решение. Неопределённость состояния, в котором проверка застаёт ЭВМ, превращается в неясность, какому критерию следовать.

Поскольку различные критерии связаны с различными условиями, в которых принимается решение, лучшее всего для сравнительной оценки рекомендации тех или иных критериев получить дополнительную информацию о самой ситуации. В частности, если принимаемое решение относится к сотням машин с одинаковыми параметрами, то рекомендуется применять критерий Байеса-Лапласа. Если же число машин не велико, лучше пользоваться критериями минимакса или Севиджа.

3.3. Производные критерии.

1. Критерий Гурвица.

Компромиссный способ или критерий Гурвица (пессимиза-оптимизма).

Этот способ принятия решений в условиях неопределенности представляет собой компромисс между оптимистичным правилом максимакса и правилом крайнего пессимизма (всегда рассчитывай на худшее), максимина (критерий Вальда), т.е. рекомендуется некое среднее решение:

$$R_H = \max_i [\alpha \min_j Э_{ij} + (1-\alpha) \max_j Э_{ij}],$$

где α – коэффициент (вес), выбираемый экспертно из интервала от 0 до 1 и показывает вероятность наступления события с низким или высоким выигрышем..

Пусть эксперты определили вес 0,6 и 0,4, соответственно. Используя таблицу 2 составим новую таблицу:

Критерий Гурвица

Ситуация (S_j)	Выигрыш		Вес		Суммарный выигрыш
	низкий	высокий	0,6	0,4	

S_1	1	3	0,6	1,2	1,8
S_2	1	4	0,6	1,6	2,2
S_3	3	5	1,8	2,0	3,8
S_4	2	8	1,2	3,2	4,4 ← max
S_5	2	7	1,2	2,8	4,0

Таким образом при выбранных весах, лучшим оказывается вариант B_2, т.е. в данном случае критерий Гурвица не отличается от правила максимакса и ориентирует на максимальный выигрыш.

Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, Гурвиц предположил оценочную функцию, которая находится где-то между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма:

$$\max_i e_{ir} = \{C \min_j e_{ij} + (1- C) \ \max_j e_{ij} \},$$

где *C*– весовой множитель.

Правило выбора согласно критерию Гурвица, формируется следующим образом:

матрица решений $\| e_{ij} \|$ дополняется столбцом, содержащим среднее взвешенное наименьшего и наибольшего результатов для каждой строки. Выбираются только те варианты, в строках которых стоят наибольшие элементы e_{ir} этого столбца.

При *C*=1 критерий Гурвица превращается в ММ-критерий. При *C* = 0 он превращается в критерий “азартного игрока”

$$\max_i e_{ir} = \max_i \max_j e_{ij} ,$$

т.е. формируется точка зрения азартного игрока, делающего ставку на то, что «выпадет» наивыгоднейший случай.

В технических приложениях сложно выбрать весовой множитель C, т.к. трудно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Поэтому чаще всего $C := {}^{1}/_{2}$.

Критерий Гурвица применяется в случае, когда :

1) о вероятностях появления состояния F_j ничего не известно;

2) с появлением состояния F_j необходимо считаться;

3) реализуется только малое количество решений;

4) допускается некоторый риск.

2. Критерий Ходжа–Лемана.

Этот критерий опирается одновременно на ММ-критерий и критерий Баеса-Лапласа. С помощью параметра ν выражается степень доверия к используемому распределений вероятностей. Если доверие велико, то доминирует критерий Баеса-Лапласа, в противном случае – ММ-критерий, т.е. мы ищем

$$\max_i e_{ir} = \max_i \{\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij}\, q_i + (1-\nu) \min_j e_{ir}\}, \qquad 0 \le \nu \le 1.$$

Правило выбора, соответствующее критерию Ходжа-Лемана формируется следующим образом:

матрица решений $\| e_{ij} \|$ дополняется столбцом, составленным из средних взвешенных (с весом $\nu \equiv \text{const}$) математическое ожиданиями и наименьшего результата каждой строки (*).

Отбираются те варианты решений в строках которого стоит наибольшее значение этого столбца.

При $\nu = 1$ критерий Ходжа-Лемана переходит в критерий Байеса-Лапласа, а при $\nu = 0$ становится минимаксным.

Выбор ν субъективен т. к. Степень достоверности какой-либо функции распределения – дело тёмное.

Для применения критерия Ходжа-Лемана желательно, чтобы ситуация в которой принимается решение, удовлетворяла свойствам:

1) вероятности появления состояния F_j неизвестны, но некоторые предположения о распределении вероятностей возможны;
2) принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций;
3) при малых числах реализации допускается некоторый риск.

3. Критерий Гермейера.

Этот критерий ориентирован на величину потерь, т.е. на отрицательные значения всех e_{ij}. При этом

$$\max_{\mathrm{i}} e_{ir} = \max_{i} \min_{\mathrm{j}} e_{ij}\, q_j.$$

Так как в хозяйственных задачах преимущественно имеют дело с ценами и затратами, условие $e_{ij}<0$ обычно выполняется. В случае же, когда среди величин e_{ij} встречаются и положительные значения, можно перейти к строго отрицательным значениям с помощью преобразования $e_{ij} - a$ при подходящем образом подобранном $a > 0$. При этом оптимальный вариант решения зависит от a.

Правило выбора согласно критерию Гермейера формулируется следующим образом :

матрица решений $\|e_{ij}\|$дополняется ещё одним столбцом содержащим в каждой строке наименьшее произведение имеющегося в ней результата на вероятность соответствующего состояния F_j. Выбираются те варианты в строках которых находится наибольшее значение e_{ij} этого столбца.

В каком-то смысле критерий Гермейера обобщает ММ-критерий: в случае равномерного распределения $q_j = \frac{1}{n}$, $j = \overline{1,n}$, они становятся идентичными.

Условия его применимости таковы :

1) вероятности появления состояния F_j неизвестны;

2) с появлением тех или иных состояний, отдельно или в комплексе, необходимо считаться;

3) допускается некоторый риск;

4) решение может реализоваться один или несколько раз.

Если функция распределения известна не очень надёжно, а числа реализации малы, то, следуя критерию Гермейера, получают, вообще говоря, неоправданно большой риск.

4. Объединенный критерий Байеса-Лапласа и минимакса.

Стремление получить критерии, которые бы лучше приспосабливались к имеющейся ситуации, чем все до сих пор рассмотренные, привело к построению так называемых составных критериев. В качестве примера рассмотрим критерий, полученный путем объединения критериев Байеса-Лапласа и минимакса (BL(MM)-критерий).

Правило выбора для этого критерия формулируется следующим образом:

матрица решений $\| e_{ij} \|$ дополняется еще тремя столбцами. В первом из них записываются математические ожидания каждой из строк, во втором - разность между опорным значением

$$e_{i_0 j_0} = \max_i \max_j e_{ij}$$

и наименьшим значением

$$\min_j e_{ij}$$

соответствующей строки. В третьем столбце помещаются разности между наибольшим значением

$$\max_j e_{ij}$$

каждой строки и наибольшим значением $\max e_{i_0 j}$ той строки, в которой находится значение $e_{i_0 j_0}$. Выбираются те варианты, строки которых (при соблюдении приводимых ниже соотношений между элементами второго и третьего столбцов) дают наибольшее математическое ожидание. А именно, соответствующее значение

$$e_{i_0 j_0} - \max_j e_{ij}$$

из второго столбца должно быть или равно некоторому заранее заданному уровню риска $\varepsilon_{доп}$. Значение же из третьего столбца должно быть больше значения из второго столбца.

Применение этого критерия обусловлено следующими признаками ситуации, в которой принимается решение:

1) вероятности появления состояний F_j неизвестны, однако имеется некоторая априорная информация в пользу какого-либо определенного распределения;
2) необходимо считаться с появлением различных состояний как по отдельности, так и в комплексе;
3) допускается ограниченный риск;
4) принятое решение реализуется один раз или многократно.

BL(MM) - критерий хорошо приспособлен для построения практических решений прежде всего в области техники и может считаться достаточно надежным. Однако заданные границы риска $\varepsilon_{доп}$ и, соответственно, оценок риска ε_i не учитывает ни число применения решения, ни иную подобную информацию. Влияние субъективного фактора хотя и ослаблено, но не исключено полностью.

Условие

$$\max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0 j} \geq \varepsilon_i$$

существенно в тех случаях, когда решение реализуется только один или малое число раз. В этих условиях недостаточно ориентироваться на риск, связанный только с невыгодными внешними состояниями и средними значениями. Из-за этого, правда, можно понести некоторые потери в удачных внешних состояниях. При большом числе реализаций это условие перестает быть таким уж важным. Оно даже допускает разумные альтернативы. При этом не известно, однако, четких количественных указаний, в каких случаях это условие следовало бы опускать.

5. Критерий произведений.

$$\max_{i} e_{ir} := \max_{i} e_{ij}$$

Правило выбора в этом случае формулируется так :

Матрица решений $\| e_{ij} \|$ дополняется новым столбцом, содержащим произведения всех результатов каждой строки. Выбираются те варианты, в строках которых находятся наибольшие значения этого столбца.

Применение этого критерия обусловлено следующими обстоятельствами :

1) вероятности появления состояния F_j неизвестны;

2) с появлением каждого из состояний F_j по отдельности необходимо считаться;

3) критерий применим и при малом числе реализаций решения;

4) некоторый риск допускается.

Критерий произведений приспособлен в первую очередь для случаев, когда все e_{ij} положительны. Если условие положительности нарушается, то следует выполнять некоторый сдвиг $e_{ij} + a$ с некоторой константой $a > |\min_{ij} e_{ij}|$. Результат при этом будет, естественно зависеть от a. На практике чаще всего

$$a := |\min_{ij} e_{ij}| + 1.$$

Если же никакая константа не может быть признана имеющей смысл, то критерий произведений не применим.

Рассмотрим тот же пример (табл. 1).

Построение оптимального решения для матрицы решений о проверках по критерию Гурвица имеет вид (при C =0.5, в 10^3):

$\Vert e_{ij} \Vert$			$C \min_j e_{ij}$	$(1-C) \max_j e_{ij}$	e_{ir}	$\max_i e_{ir}$
-20.0	-22.0	-25.0	-12.5	-10.0	-22.5	
-14.0	-23.0	-31.0	-15.5	-7.0	-22.5	
0	-24.0	-40.0	-20.0	0	-20.0	-20.0

В данном примере у решения имеется поворотная точка относительно весового множителя C : до $C = 0.57$ в качестве оптимального выбирается E_3, а при больших значениях – E_1.

Применение критерия Ходжа-Лемана (q = 0.33, ν = 0.5, в 10^3) :

$\sum_j e_{ij} q_j$	$\min_j$	ν	*(1-*	e_{ir}	$\max_i$
-	-	$\sum_j e_{ij} q_j$	$\min_j$ -12.5	-	-
-	-	-	-15.5	-	
-	-	-	-20.0	-	

Критерий Ходжа-Лемана рекомендует вариант E_1 (полная проверка) – так же как и ММ-критерий. Смена рекомендуемого варианта происходит только при $\nu = 0.94$. Поэтому равномерное распределение состояний рассматриваемой машины должно распознаваться с очень высокой вероятностью, чтобы его можно было выбрать по большему математическому ожиданию. При этом число реализаций решения всегда остаётся произвольным.

Критерий Гермейера при $q_j = 0.33$ даёт следующий результат (в 10^3):

$\lVert e_{ij} \rVert$			$\lVert e_{ij} q_j \rVert$			$e_{ir} = \min_j e_{ij} q_j$	$\boxed{} e_{ir}$
-20.0	-22.0	-25.0	-6.67	-7.33	-8.33	-8.33	-8.33
-14.0	-23.0	-31.0	-4.67	-7.67	-10.33	-10.33	
0	-24.0	-40.0	0	-8.0	-13.33	-13.33	

В качестве оптимального выбирается вариант E_1. Сравнение вариантов с помощью величин e_{ir} показывает, что способ действия критерия Гермейера является даже более гибким, чем у ММ-критерия.

В таблице, приведенной ниже, решение выбирается в соответствии с BL(MM)-критерием при $q_1=q_2=q_3={}^1/_2$ (данные в 10^3).

$\lVert e_{ij} \rVert$			$\sum_j e_{ij} q_j$	$e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij}$	$\max_j e_{ij}$	$\max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0 j}$
-20.0	-22.0	-25.0	-23.33	0	-20.0	0
-14.0	-23.0	-31.0	-22.67	+6.0	-14.0	+6.0
0	-24.0	-40.0	-21.33	+15.0	0	+20.0

Вариант E_3 (отказ от проверки) принимается этим критерием только тогда, когда риск приближается к $\varepsilon_{возм} = 15 \times 10^3$. В противном случае оптимальным оказывается E_1. Во многих технических и хозяйственных задачах допустимый риск бывает намного ниже, составляя обычно только незначительный процент от общих затрат. В подобных случаях бывает особенно ценно, если неточное значение распределения вероятностей сказывается не очень сильно. Если при этом оказывается невозможным установить допустимый риск $\varepsilon_{доп}$ заранее, не зависимо от принимаемого решения, то помочь может вычисление ожидаемого риска $\varepsilon_{возм}$. Тогда становится возможным подумать, оправдан ли подобный риск. Такое исследование обычно дается легче.

Результаты применения критерия произведения при a = 41·10^3 и a = 200·10^3 имеют вид :

	$\Vert e_{ij} + a \Vert$			$e_{ir} = \prod\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$
a=41	+21	+19	+16	6384	6384
	+27	+18	+10	4860	
	+41	+17	+1	697	
a=200	+180	+178	+175	5607	
	+186	+177	+169	5563	
	+200	+176	+160	5632	5632

Условие $e_{ij} > 0$ для данной матрицы не выполнимо. Поэтому к элементам матрицы добавляется (по внешнему произволу) сначала a = 41·10^3, а затем a = 200·10^3.

Для a = 41·10^3 оптимальным оказывается вариант E_1, а для a = 200·10^3 – вариант E_3, так что зависимость оптимального варианта от a очевидна.

Контрольные вопросы

1. Какая игра называется игрой с природой?

2. Как задается функция выигрышей активного игрока в игре с природой, если количество альтернатив у игроков ограничено?
3. Чем отличается задача принятия решения в условиях неопределенности от задачи принятия решения в условиях риска?
4. Какие существуют критерии принятия решения в условиях неопределенности?
5. Какие существуют критерии принятия решения в условиях риска?

3.4. Экономическая постановка игровых задач торговли в условиях риска и неопределенности

При решении задач управления экономическими процессами возникает необходимость выбора оптимального экономического решения в условиях риска и неопределенности. Особенностью таких условий является неясность, обусловленных или влиянием случайных факторов, или неизвестностью поведения, реакции, например, покупателей на новые виды товаров: неясностью погодных условий при перевозке грузов; недостаточной информированностью о торговых операциях, закупках, сделках; наличием очень большого числа (хотя и известных) вариантов поведения противоположной стороны. В таких случаях наблюдаются разнообразные по своей природе как бы столкновения интересов, целей и т.д. участвующих сторон.

Решением подобного рода задач конфликтных ситуаций и занимается теория игр и статистических решений, позволяющая находить оптимальные решения в условиях риска и неопределенности.

Схематизированное описание (математическая модель) конфликтов ситуации называется игрой; стороны - участники конфликта (отдельные лица или коллективы) называются игроками, а исход конфликта - выигрышем.

Задача состоит в выборе такого решения, которое обеспечивает наибольший выигрыш или наименьший проигрыш.

Неопределенность в торговле связана с действием заранее непредсказуемых внешних и внутренних факторов в процессе работы торговых организаций и предприятий. В этом случае между сторонами, участниками отсутствует «антагонизм», и такие ситуации называют «играми с природой», а решаются с помощью методов теории статистических решений.

Первая сторона (например, организация) принимает решение, а вторая сторона («природа») не оказывает первой стороне сознательного, активного противодействия, но ее реальное поведения известно.

3.4.2. Построение игровых моделей торговой практики

Пусть Т - предприятие имеет m стратегий: $T1$, T_2, T_3, ..., T_i, ..., T_m и допустим имеется n возможных состояний «природы»: $П_1$, $П_2$, $П_3$, ..., $П_j$, ..., $П_n$. Поскольку «природа» не является заинтересованной стороной, исход любого сочетания поведения сторон можно оценить с помощью выигрышей B_{ij}, первой стороны для каждой пары стратегий T_i и $П_j$. Все показатели игры записываются в виде матрицы $\| B_{ij} \|$, которая называется платежной.

Неоднозначность и определенность условий (в системе вероятностного описания) не позволяют получить одну количественную (единую) оценку вариантов решений. Более наглядный показ условий неопределенности дают характерные оценки платежной матрицы, получаемые для конкурирующих вариантов. Каждая из этих оценок односторонняя и не внушает полного доверия, однако вычисление их для анализа необходимо.

Рассмотрим наиболее интересные из них.

Минимальный выигрыш

$$B_i^{min} = \min_j B_{ij}$$

определяется как наименьшая из величин в строке, наиболее пессимистическая оценка.

Максимальный выигрыш

$$B_i^{max} = \max_j B_{ij}$$

определяется как наибольшая из величины строки платежной матрицы и характеризует то наилучшее, что дает выбор этого варианта T (оптимистическая оценка). При анализе «игры с природой» вводится показатель, позволяющий оценить, насколько то или иное состояние «природы» влияет на исход ситуации. Этот показатель называется «риском».

3.4.3. Анализ полученных результатов поиска оптимальных решений в условиях риска и неопределенности

Риском r_{ij} при пользовании стратегией T_i и состоянием «природы» $П_j$ называется разность между максимально возможным выигрышем при данном состоянии «природы» b_i^{max} = $_i^{max}$ B_{ij} и выигрышем B_{ij} при выбранной стратегии T_i:

$$r_{ij} = b_j^{max} - B_{ij}$$

Пользуясь этими положениями, строим матрицу рисков $\| r_{ij} \|$.

Теперь можно записать еще одну характерную оценку:

Максимальное значение риска для каждого решения T_j

$$r_i^{max} = \max r_{ij}$$

Для решения игровых задач существуют специальные критерии принятия решения.

1. **Критерий**, основанный на известных вероятностях состояния природы, например, покупательского спроса, по данным анализа за прошлые годы:

а) если в этом случае известны вероятности состояний «природы»:

$$p_1 = P(П_1),\ \ p_2 = P(П_2),\ p_3 = P(П_3)\ \dots\ p_n = P(П_n),$$

и при этом полагаем, что $p_1+p_2+p_3+\dots+p_n=1{,}0$, то в качестве показателя эффективности стратегии T_i берется среднее значение (математическое ожидание) - выигрыш при применении этой стратегии:

$$B_i = B_{i1}\, p_1 + B_{i2}\, p_2 + B_{i3}\, p_3 + \dots + B_{in}\, p_n,$$

а оптимальной стратегией считается такая, для которой этот показатель эффективности имеет максимальное значение, т.е.

$$B = \max_i B_i \rightarrow T_b$$

б) если каждому решению T_i соответствует множество возможных результатов B_{ij} с вероятностями соответственно p_{ij}, те среднее значение выигрыша определяется по формуле:

$$B_i = B_{i1}\, p_{i1} + B_{i2}\, p_{i2} + B_{i3}\, p_{i3} + \dots + B_{ij}\, p_{ij} + \dots + B_{in}\, p_{in},$$

а оптимальной является такая стратегия, для которой получается максимальная величина

$$B = \max_I,\ B_i \rightarrow T_{i3}.$$

В этом случае можно пользоваться значениями среднего риска

$$r_i = r_{i1}\, p_{i1} + r_{i2}\, p_{i2} + r_{i3}\, p_{i3} + \dots + r_{in}\, p_{in},$$

который следует сделать минимальным, т.е. выбрать такую стратегию T_i, для которой величина r_i обращается в минимум:

$$r = \min_i r_i \rightarrow T_r.$$

2. **Максиминный критерий Вальда.** Выбирается решение организации T_w , при котором гарантируется максимальный выигрыш в наихудших условиях:

$$W = \max_I \min_j B_{ij} = \max_i B_i^{min} \rightarrow T_n.$$

3. **Критерии пессимизма - оптимизма Гурвица**. Представляется логичным, чтобы при выборе решения вместо двух крайностей в оценке ситуации (оптимизм - пессимизм) придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. В соответствии с этим компромиссным критерием для каждого решения определяется линейная комбинация минимального и максимального выигрышей и выбирается та, для которой эта величина окажется наибольшей.

$$H = \max_I [\, x \min_j B_{ij} + (1\text{-}x) \max_j B_{ij}] \rightarrow T_н,$$

где H - показатель «пессимизма - оптимизма».

4. **Критерий минимаксного риска Сэвиджа.** По этому критерию выбирается та стратегия, при которой величина риска имеет минимальное значение в самой неблагоприятной ситуации:

$$S = \min_I \max_j r_{ij} \rightarrow T_s.$$

Сущность этого критерия заключается в том, чтобы избежать большого риска при выборе решения. Каждый из этих критериев не может быть признан вполне удовлетворительным для окончательного выбора решений, однако их комплексный анализ позволяет более наглядно представить последствия принятия тех или иных решений.

3.4.4. Правила принятия решений в условиях неопределённости

Выбор вариантов решения проблемы

При выборе вариантов решения каждой их подпроблем и проблемы в целом важно взаимодействие специалистов различной направленности (по управлению, если речь идет о совершенствовании управления; по технике, если речь идет об организации производства и др.).

Особенности выявления вариантов решений и выбора наилучшего из них предопределяются тремя факторами:

1) постановкой задачи;

2) областью использования результатов решения;

3) полнотой и определенностью исходной информации.

В зависимости от постановки задачи осуществляется выбор альтернативных вариантов, значений варьируемых параметров системы или состава формируемых комплексов.

Областями использования результатов решения могут быть задачи проектирования и управления производством. Методы выбора альтернатив мало зависят от области использования их результатов. А вот методы оптимизации при решении задач проектирования и управления существенно различаются. В задачах проектирования экономические условия бывают заданы, возмущения не учитываются и управляемые факторы задаются вероятностью или в виде нормативов, выбору подлежат конструкторские или технологические параметры. В задачах управления конструкции заданы, выбираются только технологические параметры.

Информация, используемая при выработке управленческих решений, бывает:

а) полной, которая позволяет определить численное значение целевой функции для каждой из сравниваемых альтернатив;

б) определенной, которая однозначно предсказывает значение параметров и условий;

в) вероятностной, которая позволяет с определенной вероятностью предсказать значение параметров и условий.

При полной и определенной информации удается осуществить строгий выбор решения. Когда информация полная, но вероятностная, удается осуществить выбор решения с определенной степенью риска. Если информация неполная, то решение принимается в условиях неопределенности.

Таким образом, правила выбора принятия управленческих решений можно разделить на две группы:

1) правила принятия решений без использования численных значений вероятностей исходов;

2) правила принятия решений с использованием численных значений вероятностей исходов;

1. Правила принятия решений без использования численных значений вероятностей исходов.

В некоторых, наиболее простых, случаях эти правила дают возможность фактически найти и выбрать оптимальное решение.

В более сложных случаях эти правила доставляют вспомогательный материал, позволяющий глубже разобраться в сложной ситуации и оценить каждое из возможных решений с различных точек зрения и, в конечном итоге, принять продуманное решение с минимальном риском.

Общей процедурой выбора альтернатив в условиях неопределенности является построение матрицы эффектов (или ущербов). В терминологии теории игр ее нередко именуют матрицей выигрышей и проигрышей или матрицей платежей. Формы матриц эффектов и рисков приведены на рис. 1.

Вариант	Ситуация				
	S_1	…	S_j	…	S_n
B_1	$Э_{11}$	…	$Э_{1j}$	…	$Э_{1n}$
…	…	…	…	…	…
B_i	$Э_{i1}$	…	$Э_{ij}$	…	$Э_{in}$
…	…	…	…	…	…
B_m	$Э_{m1}$	…	$Э_{mj}$	…	$Э_{mn}$

а) $Э_{ij}$ – эффект i-го варианта (B_i) при j-й ситуации (S_j)

Вариант	Ситуация				
	S_1	…	S_j	…	S_n
B_1	r_{11}	…	r_{1j}	…	r_{1n}
…	…	…	…	…	…
B_i	r_{i1}	…	r_{ij}	…	r_{in}
…	…	…	…	…	…
B_m	r_{m1}	…	r_{mj}	…	r_{mn}

б) r_{ij} – рист i-го варианта (B_i) при j-й ситуации (S_j)

Рис. 1. Матрицы эффектов (а) и рисков (б).

В табл. 2 приведен условный пример заполнения матрицы эффектов. Данные табл. 2 используются ниже для выбора варианта решения.

Таблица 2

Матрица эффектов по вариантам альтернативных решений

(условный пример)

Вариант решения (B_i)	Ситуация (S_j)					$Э_i$	
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	min	max
B_1	1	2	3	5	5	1	5
B_2	2	1	5	8	7	1	8
B_3	3	4	4	2	2	2	4

Будем предполагать, что лицу, принимающему решение не противостоит разумный противник.

Данные, необходимо для принятия решения в условии неопределенности, обычно задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям, а столбцы – возможным состояниям системы.

Пусть, например, из некоторого материала требуется изготовить изделие, долговечность которого при допустимых затратах невозможно определить. Нагрузки считаются известными. Требуется решить, какие размеры должно иметь изделие из данного материала.

Варианты решения таковы:

E_1 – выбор размеров из соображений максимальной долговечности ;

E_m– выбор размеров из соображений минимальной долговечности ;

E_i – промежуточные решения.

Условия требующие рассмотрения таковы :

F_1 – условия, обеспечивающие максимальной долговечность;

F_n – условия, обеспечивающие min долговечность;

F_i – промежуточные условия.

Под результатом решения $e_{ij} = e(E_i\ ;\ F_j\ )$ здесь можно понимать оценку, соответствующую варианту E_i и условиям F_j и характеризующие прибыль, полезность или надёжность. Обычно мы будем называть такой результат полезностью решения.

Тогда семейство (матрица) решений $\|e_{ij}\|$ имеет вид :

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & .. & n \\
\hline
1 & 11 & 12 & .. & 1n \\
2 & 21 & 22 & .. & 2n \\
 & & .... & & \\
.. & .... & & & \\
m & m1 & m2 & .. & mn
\end{array}
$$

Чтобы прийти к однозначному и по возможности наивыгоднейшему варианту решению необходимо ввести оценочную (целевую) функцию. При этом матрица решений $\|e_{ij}\|$ сводится к одному столбцу. Каждому варианту E_i приписывается, т.о., некоторый результат e_{ir}, характеризующий, в целом, все последствия этого решения. Такой результат мы будем в дальнейшем обозначать тем же символом e_{ir}.

2. Правила принятия решений с использованием численных значений вероятностей исходов.

Вероятностный подход осуществляется тогда, когда вероятность возникновения каждой j-й ситуации известны (например, получены в результате обработки соответствующих статистических наблюдений). Пусть вероятности наступления ситуаций распределяются следующим образом:

$P_1 = 0,3$; $P_2 = 0,4$; $P_3 = 0,1$; $P_4 = 0,15$; $P_5 = 0,05$;

Наибольшая вероятность $P_2 = 0,4$ соответствует ситуации S_2. Теперь рассмотрим доходы по каждому варианту в ситуации S_2 и выберем наибольший (см. таблицу 2). Таким образом по правилу максимальной вероятности лучшим оказывается вариант B_3 (доход составит 4).

Но наиболее распространенный способ использования вероятностей при принятии решений – это вычисление математического ожидания. Оно рассчитывается для каждого решения (варианта) либо для доходов, либо для возможных потерь. Выбирается решение либо с наибольшим ожидаемым доходом, либо с наименьшими возможными потерями.

Максимизирует ожидаемый выигрыш для вариантов:

$$M_i = \sum_{j}^{1-S} Э_{ij} P_i$$

$M_1 = 1 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,1 + 5 \times 0,15 + 5 \times 0,05 = 2,4$

$M_2 = 2 \times 0,3 + 1 \times 0,4 + 5 \times 0,1 + 8 \times 0,15 + 7 \times 0,05 = 3,05$

$M_3 = 3 \times 0,3 + 4 \times 0,4 + 4 \times 0,1 + 2 \times 0,15 + 2 \times 0,5 = 3,3$

Итак, максимальное значение ожидаемого выигрыша 3,3 соответствует варианту B_3.

В случае минимизации ожидаемых возможных потерь производятся те же действия, только с использованием таблицы возможных потерь (таблица 3).

$R_1 = 4 \times 0,3 + 3 \times 0,4 + 2 \times 0,25 + 0 \times 0,15 + 0 \times 0,05 = 2,9$

$R_2 = 6 \times 0,3 + 7 \times 0,4 + 3 \times 0,25 + 0 \times 0,15 + 1 \times 0,05 = 5,4$

$R_3 = 1 \times 0,3 + 0 \times 0,4 + 0 \times 0,25 + 2 \times 0,15 + 2 \times 0,05 = 0,7$

Таким образом, минимизация ожидаемых возможных потерь показывает, что вариант B_3 лучший.

Вместе с тем, учитывая непостоянность значений вероятностей, рекомендуется осуществлять анализ чувствительности решений. Суть данного анализа заключается в изменении базовых значений вероятностей. Так, в нашем примере, даже незначительное изменение числовых значений вероятностей (например: P_1 = 0,25 и P_5 = 0,1) приводит совершенно к иным результатам.

Контрольные вопросы.

1. Понятие неопределенности и риска?
2. Стратегия поведение и исход игры?
3. Критерии оценки стратегий?
4. Выбор оптимальной стратегии?
5. Принятие решений на основе критерия Вальда.
6. Сущность критерия пессимизма - оптимизма. Гурвица.
7. Критерий минимального риска Севиджа.

3.4.5. Примеры теоретико-игровых моделей игр с природой

Инвестор выбирает стратегию инвестирования на полгода. Имеющиеся денежные средства он может вложить в акции (чистая стратегия A1), облигации (чистая стратегия $A2$) или положить на депозит (чистая стратегия A3). Конечно, он может сочетать эти стратегии инвестирования, но мы рассмотрим случай чистых стратегий.

Бизнес-аналитики прогнозируют, что в конце полугодия возможны следующие ситуации с фондовым рынком: рынок вырастет ($N1$, $q1$,0,5

), рынок будет претерпевать незначительные колебания роста ($N2$, $q2$, 0,3), рынок будет падать ($N3$, $q3$,0,2).

Платежная матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 50 & 5 & -40 \\ 25 & 15 & -5 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix},$$

где $a\ ij$ – проценты на инвестируемый капитал, которые будет получены при использовании инвестором стратегии $A\ i$, если через полгода ситуация на фондовом рынке будет описываться состоянием $N\,j$.

Решение.

Найдем матрицу рисков:

$$\max_i a_{i1} = 50$$
$$\max_i a_{i2} = 15$$
$$\max_i a_{i3} = 10$$

Элементы матрицы рисков:

$r11 = 50 - 50= 0$, $r21 =50 -25 =25$, $r31 = 50- 10=40$,
$r12 = 15-5=10$, $r22 =15 - 15=0$, $r32 = 15-10 =5$,
$r13 =10 -(- 40) =50$, $r23 = 10- (-5) =15$, $r33 = 10-10 =0$.

Матрица рисков имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 50 \\ 25 & 0 & 15 \\ 40 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Используем критерий Байеса для определения оптимальной стратегии.

Найдем средние выигрыши по формуле:

$a1 =1/3*(50+ 5-40)=5$,
$a2 =1/3*(25 +15- 5)=35/3$,
$a3 =1/3*(10+ 10+ 10)=10$.

На основании критерия Байеса рекомендуется выбрать стратегию $A1$.

Используем критерий *Лапласа* для определения оптимальной стратегии. Предполагаем, что экспертные оценки неизвестны и

$$q1 = q2 = q = 1/3 \ .$$

Найдем средние выигрыши:

$$a1 = 1/3*(50+5-40)=5 \ ,$$
$$a2 = 1/3*(25+15-5)=35/3 \ ,$$
$$a3 = 1/3*(10+10+10)=10 \ .$$

На основании критерия Лапласа рекомендуется выбрать стратегию $A2$.

Используем критерий *Сэвиджа* для определения оптимальной стратегии. Анализируем матрицу рисков:

$$\begin{pmatrix} 0\,10\,50 \\ 25\,0\,15 \\ 40\,5\,0 \end{pmatrix}.$$

Найдем максимальный риск для каждой стратегии:

γ 1=50 , γ2 =25 , γ3 =40

Выбираем стратегию, для которой максимальный риск будет минимальным. На основании критерия Сэвиджа рекомендуется выбрать стратегию $A2$.

Используем критерий *Вальда* для определения оптимальной стратегии.

Анализируем платежную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 50\,5\ \ -40 \\ 25\,15\,-5 \\ 10\,10\,10 \end{pmatrix}$$

Найдем минимальный выигрыш для каждой стратегии:

$$\mu_1 = -40 \ , \mu_2 = -5, \mu_3 = 10 \ .$$

Выбираем стратегию, для которой минимальный выигрыш максимальный. На основании критерия Вальда рекомендуется выбрать стратегию $A3$.

Как видим, разные критерии предлагают разные схемы принятия оптимального решения, рекомендуемые стратегии также получились неодинаковыми.

Пример №2.

Предприятие имеет возможность самостоятельно планировать объемы выпуска сезонной продукции A_1, A_2, A_3. Не проданная в течении сезона продукция позже реализуется по сниженной цене. Данные о себестоимости продукции, отпускных ценах и объемах реализации в зависимости от уровня спроса приведены в таблице:

Вид продукции	Себестоимость	Цена единицы Продукции		Объем реализации При уровне спроса		
		В течение сезона	После уценки	Повышенном	среднем	Пониженном
A_1	d_1	p_1	q_1	a_1	b_1	c_1
A_2	d_2	p_2	q_2	a_2	b_2	c_2
A_3	d_3	p_3	q_3	a_3	b_3	c_3

Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, указать допустимые стратегии сторон, составить платежную матрицу

2) дать рекомендации об объемах выпуска продукции по видам, обеспечивающих предприятию наивысшую прибыль.

Указание. Для уменьшения размерности платежной матрицы считать, что одновременно на все три вида продукции уровень спроса одинаков:

повышенный, средний или пониженный.

Вид продукции	Себестоимость	Цена единицы Продукции		Объем реализации При уровне спроса		
		В течение сезона	После уценки	Повышенном	среднем	Пониженном
A_1	2,6	3,4	2,8	14	8	5
A_2	3,7	4,2	3,2	38	22	9
A_3	1,5	2,8	1,7	24	13	7

Решение.

В игре участвуют 2 игрока: А - производитель, В - потребитель.

Игрок А стремится реализовать свою продукцию так, чтобы получить максимальную прибыль. Стратегиями игрока А являются:

A_1 - продавать продукцию при повышенном состоянии спроса

A_2 - продавать продукцию при среднем состоянии спроса

A_3 - продавать продукцию при пониженном состоянии спроса

Игрок В стремится приобрести продукцию с минимальными затратами. Стратегиями игрока В являются:

B_1 - покупать продукцию при повышенном состоянии спроса

B_2 - покупать продукцию при среднем состоянии спроса

B_3 - покупать продукцию при пониженном состоянии спроса

Интересы игроков А и В - противоположны. Определим цену продукции в течение сезона и после уценки:

Вид продукции	**себестоимость**	**Цена в течение сезона**	**Цена после уценки**
A_1	2,6	3,4-2,6=0,2	2,8-2,6=0,2
A_2	3,7	4,2-3,7=0,5	3,2-3,7= -5
A_3	1,5	2,8-1,5=1,3	1,7-1,5=0,2

Рассчитаем элементы платежной матрицы

	Спрос			
Предложение	стратегии	Повышенный спрос 14+38+24	Средний спрос 8+22+13	Пониженный спрос 5+9+7
	Повышенный спрос 14+38+24	14*0,8+38*0,5+ 24*1,3=61,4	8*0,8+(14-8) *0,2+ 22*0,5+(38-22)*(-5) +13*1,3+(24-13)*0,2 =29,7	5*0,8+(14-5)*0,2+ 9*0,5+(38-9)*(-5)+ 7*1,3+(24-7)=8,3
	Средний спрос 8+22+13	8*0,8+22*0,5+ 13*1,3=34,3	8*0,8+22*0,5+ 13*1,3=34,3	5*0,8+(8-5)*0,2+ 9*0,5+(22-9)*(-5)+ 7*1,3+(13-7)*0,2 =12,9
	Пониженный спрос 5+9+7	5*0,8+9*0,5+7*1,3 =17,6	5*0,8+9*0,5+ 7*1,3=17,6	5*0,8+9*0,5+ 7*1,3=17,6

Платежная матрица примет вид

Стратегии	B_1	B_2	B_3	$\alpha_i=\min\limits_j a_{ij}$
A_1	61.4	29.7	8.3	8.3
A_2	34.3	34.3	12.9	12.9
A_3	17.6	17.6	17.6	17.6
$\beta_j=\max\limits_i a_{ij}$	61.4	34.3	17.6	

$\alpha= \max \alpha_i= 17.6$ **$\beta = \min \beta_j = 17.6$**

Так как **$\alpha= \beta = \nu = 17{,}6$,** то найдена седловая точка. Значит оптимальное решение: A_3; B_3

Производитель (игрок А) получит гарантированную прибыль в размере 17,6 ден.ед., если будет реализовывать свою продукцию при пониженном уровне спроса в объеме 5,9 и 7 ед. соответственно продукции A_1,A_2 иA_3

Пример 3. Директор торговой фирмы, продающей телевизоры марки «Zarya» решил открыть представительство в областном центре.

У него имеются альтернативы либо создавать собственный магазин в отдельном помещении, либо организовывать сотрудничество с местными торговыми центрами. Всего можно выделить 5 альтернатив решения: А 1А 2А3 А 4 А 5 .Успех торговой фирмы зависит от того, как сложится ситуация на рынке предоставляемых услуг. Эксперты выделяют 4 возможных варианта развития ситуации S_1 S_2 S_3 S_4

Прибыль фирмы для каждой альтернативы при каждой ситуации представлена матрицей выигрышей a ij (млн. сум./год).

Ai /Bj	***B*1**	***B*2**	***B*3**	***B*4**
***A*1**	8	12	14	5
***A*2**	9	10	11	10
***A*3**	2	4	9	22
***A*4**	12	14	10	1
***A*5**	15	6	7	14

Рассмотрим основные критерии, позволяющие выбирать оптимальную альтернативу для принятия решения.

1) Критерий Лапласа.

Он основан на предположении, что каждый вариант развития ситуации (состояния «природы») равновероятен. Поэтому, для принятия решения, необходимо рассчитать функцию полезности *Fi* для каждой альтернативы, равную среднеарифметическому показателей привлекательности по каждому «состоянию природы»:

$$F_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

Выбирается та альтернатива, для которой функция полезности максимальна. Для примера:

$F1$= 1/4 (8+ 12+ 14 +5)= 9,75;
$F2$= 1/4 (9 +10 +11+ 10)= 10;
$F3$= 1/4 (2+ 4+ 9 +22)=9,25;
$F4$= 1/4 (12+ 14+ 10+ 1) =9,25;
$F5$= 1/4 (15 +6 +7+ 14)= 10,5.

Видно, что функция полезности максимальна для альтернативы А5,следовательно, ее рациональнее всего принять.

2) Критерий Вальда.

Данный критерий основывается на принципе максимального пессимизма, то есть на предположении, что скорее всего произойдет наиболее худший вариант развития ситуации и риск наихудшего варианта нужно свести к минимуму. Для применения критерия нужно для каждой альтернативы выбрать наихудший показатель привлекательности i a (наименьшее число в каждой строке матрицы выигрышей) и выбрать ту альтернативу, для которой этот показатель максимальный.

Для нашего примера:a_1=5; a_2=9; a_3=2; a_4 =1; a_5=6. Видно, что наилучшим из наихудших показателей обладает альтернатива A_2 , для нее a_2=9 наибольшее.

3) **Критерий максимального оптимизма**.

Наиболее простой критерий, основывающийся на идее, что лицо принимающее решение, имея возможность в некоторой степени управлять ситуацией, рассчитывает, что произойдет такое развитие ситуации, которое для него является наиболее выгодным. В соответствии с критерием принимается альтернатива, соответствующая максимальному элементу матрицы выигрышей.

Для приведенного примера эта величина a_{34}=22 , поэтому выбираем альтернативу A_3.

4) **Критерий Сэвиджа**.

Он основан на принципе минимизации потерь, связанных с тем, что лицо принимающее решение принял не оптимальное решение. Для решения задачи составляется матрица потерь, которая называется *матрицей рисков* rij, которая получается из матрицы выигрышей $a\ ij$ путем вычитания из максимального элемента каждого столбца a_j^{max}=max(aij) всех остальных элементов. В рассматриваемом примере эта матрица есть:

Ai /Bj	***B*1**	***B*2**	***B*3**	***B*4**
***A*1**	7	2	0	17
***A*2**	6	4	3	12
***A*3**	13	10	5	0
***A*4**	3	0	4	21
***A*5**	0	8	7	8

Далее, для каждой альтернативы определяем величины bi, равные максимальному риску (наибольшее число в каждой строке матрицы рисков) и выбирают ту альтернативу, для которой максимальный риск минимален. В нашем примере: b_1 =17; b_2 =12; b_3 =13; b_4 =21; b_5 =18,

минимально b_2 =12. Принимаем альтернативу A_2 .

5) **Критерий Гурвица**.

Это самый универсальный критерий, который позволяет управлять степенью «оптимизма - пессимизма» лицо принимающее решение.

Введем некоторый коэффициент α, который назовем *коэффициентом доверия* или коэффициентом оптимизма. Этот коэффициент можно интерпретировать как вероятность, с которой произойдет наилучший для лицо принимающее решение исход. Исходя из этого, наихудший вариант можно ожидать с вероятностью (1-α). Коэффициент доверия αпоказывает, насколько лицо принимающее решение может управлять ситуацией и в той или иной степени рассчитывает на благоприятный для него исход. Если вероятности благоприятной и неблагоприятной ситуации для лицо принимающее решение равны, то следует принять α=0,5.

Для реализации критерия определяются наилучшие a_i^+и наихудшие a_i^- значение каждой альтернативе по формулам

$$a_i^{\ +} = \max(a_{ij})\ a_i^{\ -} = \min(a_{ij}).$$

Далее, вычисляются функции полезности

по формуле: $F_i = a_i^{\ +} * \alpha + a_i^{\ -} * (1-\alpha)$

Выбирается та альтернатива, для которой функция полезности максимальна.

Предположим, что для нашего примера ЛПР достаточно уверен в положительном результате и оценивает вероятность максимального успеха в α=0,7. Тогда:

F_1=14* 0,7 5* (1- 0,7) =11,3;
F_2=11* 0,7+ 9* 0,3)= 10,4;
F_3=22* 0,7+ 2* 0,3=16,0;
F_4=14 *0,7+ 1* 0,3 =10,1;
F_5=15 *0,7+ 6 *0,3 =12,3

В соответствии с расчетами лицо принимающее решение следует выбрать альтернативу A_3.

Если же, например, лицо принимающее решение не очень уверен в положительном исходе и расценивает его вероятность порядка α=0,2, то функции полезности равны:

$F1$=14* 0,2+ 5 *(1 0,2)= 6,8;
$F2$=11 *0,2+ 9* 0,8= 9,4;
$F3$=22* 0,2+ 2 *0,8= 6;
$F4$=14 *0,2+ 1* 0,8= 3,6;
$F5$=15 *0,2 +6 *0,8 =7,8

Видно, что в этом случае следует принять A_2, для которого функция полезности максимальна.

Следует отметить, что при α=0, критерий Гурвица переходит в пессимистический критерий Вальда, а при α=1 – в критерий максимального оптимизма.

В случае, если показатель привлекательности по критерию $a\ ij$ *минимизируется*(*чем меньше, тем лучше для лица принимающего решения*, например затраты, риск и др.), то критерии принятия оптимального решения несколько меняются. Рассмотрим эти отличия.

Критерий *Лапласа* определяет оптимальное решение по минимальной функции полезности. Применяя критерий *Вальда* необходимо вычислять максимальный показатель каждой альтернативы (строки) ai и принимать альтернативу, где этот показатель минимален. Критерий *максимального оптимизма* позволяет определить оптимальное решение, соответствующее минимальному элементу матрицы выигрышей (которую в случае минимизации часто называют матрицей потерь).

Матрица рисков в критерии *Сэвиджа* получается в результате вычитания из каждого элемента матрицы потерь $a\ ij$ минимального элемента каждого столбца $a_j^{\min} = \min(a_{ij})$. Для реализации критерия *Гурвица* вычисляются максимальные и минимальные показатели для каждой альтернативы $a_i^{\ +} = \max(a_{ij})$ $a_i^{\ -} = \min(a_{ij})$ и функции полезности рассчитываются по приведенным формулам.

3.4.6. Решение игры против природы в смешанных стратегиях

Расширение класса стратегий предполагает нахождение равновесия среди вероятностных распределений, заданных на множествах

$M = \{1, 2, ...,m\}$ и $N = \{1, 2, ..., n\}$.

Определение 1. Смешанной стратегией игрока I будем называть вектор

$x = (x1, x2, ..., xm)$, *где* $xi \geq 0$, $i = 1, ...,m$ *и* $\sum_{i=1}^{m} X_i = 1$

Аналогично определим смешанную стратегию игрока II как

$y = (y1, y2, ..., yn)$, *где* $yj \geq 0$, $j = 1, ..., n$ *и* $\sum_{i=1}^{m} Y = 1$

Таким образом, здесь xi (yj) представляет собой вероятность, с которой игрок I (II) выбирает стратегию i (j). В отличие от новых стратегий, стратегии $i \in M$, $j \in N$ будем называть чистыми стратегиями.

Заметим, что чистой стратегии i соответствует смешанная стратегия x = (0, ..., 0, 1, 0, ...0), где 1 стоит на i-м месте, для краткости можно написать просто $x = i$. Множество смешанных стратегий игрока I (II) обозначим X $(Y\ )$. Те чистые стратегии, которые используются с положительной вероятностью в смешанной стратегии, образуют носитель или, как еще говорят, спектр смешанной стратегии.

Поскольку теперь любая ситуация $(i,\ j)$ реализуется с вероятностью $xiyj$, то математическое ожидание выигрышей игроков имеет вид

$$H_1(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha(i,j) * x_i y_j$$

$$H_2(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b(i,j) * x_i y_j$$

Таким образом, расширение первоначальной дискретной игры имеет вид, где стратегиями игроков являются вероятностные

распределения x и y, а функции выигрыша имеют билинейный вид. Заметим, что стратегии x и y образуют симплексы $X = \left\{ x : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1,2,3,\dots.m \right\}$ и

$$Y = \left\{ y : \sum_{i=1}^{m} y_i = 1, y_i \geq 0, i = 1,2,3,\dots.n \right\}$$

в пространствах Rm и Rn, соответственно.

Поскольку X и Y образуют выпуклые многогранники в Rm и Rn, и функции выигрыша $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$ являются линейными по каждой из переменных, то получившаяся игра

относится к классу выпуклых игр.

Теорема 1. В биматричных играх существует равновесие по Нэшу в классе смешанных стратегий.

Заметим, что теорема Нэша доказывает существование равновесия по Нэшу, однако не дает алгоритма, как его находить. В ряде случаев может помочь следующее утверждение.

Теорема 2. Для того чтобы ситуация $(x*, y*)$ была равновесием по Нэшу, необходимо и достаточно, чтобы для любых чистых стратегий $i \in M$ и $j \in N$, выполнялись условия:

$$H_1(i, y^*) \leq H_1(x^*, y^*), \quad H_2(x^*, j) \leq H_2(x^*, y^*),$$

Доказательство. Необходимость следует из определения равновесия по Нэшу, поскольку условия выполняются для произвольных стратегий x и y, в том числе и для чистых стратегий.

Достаточностьу словий (9.2) следует из того, что если первое неравенство

$H_1(i,\ y*) \leq H_1(x*,\ y*)$ умножить на xi и просуммировать по $i = 1, \ldots, m$, то получим условие $H1(x,\ y*) \leq H1(x*,\ y*)$ для произвольной стратегии x.

Аналогичные рассуждения верны и для второго неравенства в (9.2).

Критерии Вальда, Лапласа, Гурвица, Сэвиджа применяются в тех случаях, когда ЛПР вынужден выбирать только чистые стратегии, и не может использовать смешанные стратегии. Однако, существуют практические задачи принятия решений, в которых ЛПР может применять смешанные стратегии. Рассмотрим два примера таких задач.

Пример. *«Задача о зонтике»*. Природа может реализовать одно из двух состояний: дождь, ясно. Человек принимает одно из двух решений: брать зонт, не брать зонт. Полезности игрока записаны в следующей Таблице:

Природа / Человек	Дождь	Ясно
Брать зонт	1	0
Не брать зонт	-1	2

Предполагается, что решение принимается каждый день. Требуется найти решение в смешанных стратегиях.

Решение. Запишем матрицу:

$$\begin{array}{cccc} & y & 1-y & \\ \begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} 0\,* \\ -1 \end{array} \\ & 1 & 2 & \\ & * & & \end{array}$$

$$\alpha = 0$$
$$\beta = 1$$

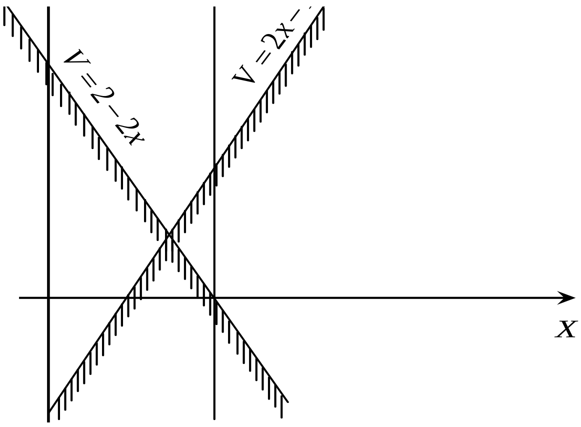
Так как $\alpha \neq \beta$, то решения в чистых стратегиях нет. Найдём решение в смешанных стратегиях. Рассмотрим задачу для первого игрока.

$$\begin{cases} x \cdot 1 - 1 \cdot (1-x) \geq v \\ x \cdot 0 + 2 \cdot (1-x) \geq v \\ 0 \leq x \leq 1 \\ v \to \max \end{cases}$$

Графо-аналитическое решение (Рис.3):

$$2x - 1 = v$$
$$2 - 2x = v$$

Рисунок 3



$$2x - 1 = 2 - 2x$$
$$4x = 3$$
$$x = \frac{3}{4}$$

$$v = \frac{6}{4} - 1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ответ: в трёх случаях из четырёх нужно брать зонт.

Пример. *«Комплектация оборудования»*. Фирма выбирает между несколькими типами комплектации оборудования. Стратегиями фирмы в комплектации оборудования будут $i = 1, 2, \ldots, m$.

Внешняя среда (заказчики) выбирают тип заказа. Каждому типу комплектации и каждому типы заказа соответствует определённый исход, который приносит фирме прибыль (убыток) a_{ij}. В результате получаем матрицу игры в следующей таблице:

		Типы заказов					
		1	2	…	j	…	n
Типы заказов	1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
	2	a_{12}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
				…		…	
	i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
	$\vdots$	…	…	…	…	…	…
	m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}

Если седловой точки нет, то решение необходимо искать в смешанных стратегиях.

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}.$$

Оптимальная смешанная стратегия находится из решения задачи линейного программирования

$A^T X \geq V$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

V→max

Здесь смысл чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m$ отличается от предыдущей задачи. В данном случае, x_i – это доля затрат фирмы на оборудование типа i.

Итак, возможность применения смешанной стратегии реализуется

1) Либо как статистическая или вероятностная смесь. Условием является повторяемость ситуации принятия решений.
2) Либо как физическая смесь. Условием является возможность одновременного использования всех чистых стратегий в некоторых пропорциях.

3.4.7. Использование линейной оптимизации при решении матричных игр

Пусть игра $m \times n$ не имеет оптимального решения в чистых стратегиях, т.е. седловая точка отсутствует $(\alpha \neq \beta)$.

Будем считать, что все элементы платежной матрицы неотрицательны (если это не так, то можно ко всем элементам матрицы добавить некоторое число L, переводящее платежи в область неотрицательных значений - очевидно, при этом цена игры увеличится на L, а решение задачи не изменится). Таким образом, предполагаем, что γ >0.

Будем искать решение игры в смешанных стратегиях:

$$p_I^* = (p_1, p_2, ..., p_m); \quad q_{II}^* = (q_1, q_2, ..., q_n)$$

Применение игроком I оптимальной смешанной стратегии p_I^* гарантирует ему, независимо от поведения игрока II, выигрыш, не меньший цены игры γ .

Пусть игрок II применяет свою активную чистую j-ю стратегию, а игрок I - свою оптимальную стратегию p_I^*. Тогда средний выигрыш игрока I будет равен

$$\gamma_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \ldots + a_{ij}p_i + \ldots + a_{mj}p_m, \ j = \overline{1,n}.$$

Учитывая, что $\gamma_j \quad (j = \overline{1,n})$ не может быть меньше γ, запишем условия:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{i1}p_i + \ldots + a_{m1}p_m \ge \gamma; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{i2}p_i + \ldots + a_{m2}p_m \ge \gamma; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \ldots + a_{ij}p_i + \ldots + a_{mj}p_m \ge \gamma; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{in}p_i + \ldots + a_{mn}p_m \ge \gamma. \end{array}\right\} \qquad (3.4.1)$$

Разделив левую и правую части каждого из неравенств (3.4.1) на цену игры γ>0, получим:

$$a_{1j}\frac{p_1}{\gamma} + a_{2j}\frac{p_2}{\gamma} + \ldots + a_{ij}\frac{p_i}{\gamma} + \ldots + a_{mj}\frac{p_m}{\gamma} \ge 1, \ j = \overline{1,n}. \qquad (3.4.2)$$

При использовании обозначений

$$\frac{p_i}{\gamma} = x_i \quad i = \overline{1,m}. \qquad (3.4.3)$$

неравенства (4.5) примут вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{i1}x_i + \ldots + a_{m1}x_m \ge 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{i2}x_i + \ldots + a_{m2}x_m \ge 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{1n}x_i + \ldots + a_{mn}x_m \ge 1, \end{cases} \qquad (3.4.4)$$

где, очевидно, все $x_i \ge 0$, так как $p_i \ge 0, \quad \gamma > 0$.

Из равенства $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$ и в силу определения (3.4.4) следует, что переменные (x_i) удовлетворяют условию

$$x_1 + x_2 + ... + x_i + ... + x_m = \frac{1}{\gamma}.$$

Учитывая, что игрок I стремится максимизировать γ, получаем линейную функцию

$$f(x) = x_1 + x_2 + ... + x_i + ... + x_m \to \min . \qquad (3.4.5)$$

Таким образом, задача решения игры свелась к следующей задаче линейной оптимизации: найти неотрицательные значения переменных $x_i, i = \overline{1, m},$ минимизирующие линейную функцию (3.4.5) и удовлетворяющие ограничениям (3.4.4).

Из решения задачи линейной оптимизации легко найти цену игры γ и оптимальную стратегию $p_I^* = (p_1, p_2, ..., p_m)$ игрока I:

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}; \quad p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i}, \; i = \overline{1, m}.$$

В свою очередь, оптимальная стратегия игрока II $q_{II}^* = (q_1, q_2, ..., q_n)$ может быть найдена из выражения

$$q_j = \frac{u_j}{\sum_{j=1}^{n} u_j}, \; j = \overline{1, n},$$

где u_j - неотрицательные переменные задачи линейной оптимизации:

$$f(u) = u_1 + u_2 + ... + u_j + ... + u_n \to \max;$$
$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1j}u_j + ... + a_{1n}u_n \le 1;$$
$$a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2j}u_j + ... + a_{2n}u_n \le 1;$$
$$..$$
$$a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mj}u_j + ... + a_{mn}u_n \le 1,$$

которая является двойственной по отношению к задаче, представленной условиями (4.7) и (4.8).

В этой системе неравенств переменные $u_j = \dfrac{q_j}{\gamma}, j = \overline{1,n}.$

Таким образом, оптимальные стратегии $p_I^* = (p_1, p_2, ..., p_n)$ и $q_{II}^* = (q_1, q_2, ..., q_n)$ игры с платежной матрицей a_{ij} $(m \times n)$ могут быть найдены путем решения симметричной пары двойственных задач линейной оптимизации.

Исходная задача

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1,\ j = \overline{1,n};$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1,m}.$$

Двойственная задача

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n} u_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \le 1, i = \overline{1,m};$$

$$u_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Цена игры и вероятности применения стратегий игроками I и II равны:

$$\gamma = \frac{1}{f(x)_{\min}} = \frac{1}{f(u)_{\max}};$$

$$p_i = \gamma \cdot \chi_i, i = \overline{1,m}, \quad q_j = \gamma \cdot u_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Как уже отмечалось, любая парная игра с нулевой суммой может быть сведена к решению задачи линейной оптимизации. Используя значение функции и неизвестных взаимно двойственных задач линейной оптимизации, легко найти цену игры и вероятности применения стратегий каждым из игроков.

Теорема об активных стратегиях.

Стратегия *i* первого игрока называется его *активной стратегией,* если в оптимальной стратегии x^* вероятность $x_i^* > 0$. Аналогично стратегия j игрока 2 называется его *активной стратегией*, если в оптимальной стратегии y^* вероятность $y_j^* > 0$.

Теорема 5. Если один из участников игры применяет свою оптимальную стратегию, то ожидаемый выигрыш останется неизменным и равным *v* независимо от характера действий другого участника игры в пределах его активных стратегий.

Доказательство. Обозначим $I = \{i\}$ для каждых $x_i^* > 0$, где $\{i\}$ – множество оптимальных стратегий первого игрока; $J = \{j\}$ для каждых $y_j^* > 0$, где $\{j\}$ – множество оптимальных стратегий второго игрока. Пусть второй игрок выбрал чистую стратегию $j \in J$, тогда величина среднего выигрыша будет равна $v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^*$. Данный средний выигрыш достигается в том случае, когда первый игрок выбирает свою оптимальную стратегию x^*, а второй игрок реализует чистую стратегию из числа активных. Очевидно, что

$v_j \ge v$.

С другой стороны, по определению значение игры будет равно

$$v = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^* y_j^* = \sum_{j=1}^{n} y_j^* \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^* = \sum_{j=1}^{n} V_j y_j^* = \sum_{j\in J} V_j y_j^*$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} v = \sum_{j\in J} v_j y_j^* \\ v_j \ge v \\ v_j \ge 0 \\ \forall j \in J \\ y_j^* > 0 \end{cases}$$

Это условие может выполняться только в случае, когда

$$v_j = v$$

$$v = v\sum_{j\in J} y_j^* = v \cdot 1 = v$$

Теорема доказана.

Сведение игры двух лиц с нулевой суммой к задаче линейного программирования

Если седловая точка отсутствует, то общим методом решения игры любой (конечной) размерности является сведение игры двух лиц с нулевой суммой к задаче линейного программирования. Из основного положения теории стратегических игр следует, что при использовании смешанных стратегий существует по меньшей мере одно оптимальное решение с ценой игры v, причем $\alpha \le v \le \beta$, т.е. цена игры находится между нижним и верхним значениями игры. Величина v неизвестна, но можно предположить, что $v > 0$. Это условие выполняется, поскольку путем преобразования матрицы всегда можно сделать все ее элементы положительными. Таким образом, если в исходной платежной матрице имеется хотя бы один *неположительный* элемент, то первым шагом в процедуре сведения игры к задаче линейного программирования должно быть ее преобразование в матрицу, *все* элементы которой *строго положительны.* Для этого достаточно увеличить все элементы исходной матрицы на одно и то же число $d > \max_i \min_j |a_{ij}|$,

где $a_{ij} \le 0$. При таком преобразовании матрицы оптимальные стратегии игроков не изменяются.

Допустим, что смешанная стратегия игрока 1 складывается из стратегий $a_1, a_2, \ldots, a_m$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_m$ ($\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $p_i \ge 0$).

Оптимальная смешанная стратегия игрока 2 складывается из стратегий $b_1, b_2, \ldots, b_n$ с вероятностями $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ($\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$, $q_j \ge 0$). Условия игры определяются платежной матрицей $\{a_{ij}\}_{m,n}$, $a_{ij} \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.

Если игрок 1 применяет оптимальную смешанную стратегию, а игрок 2 - чистую стратегию b_j, то средний выигрыш игрока 1 (математическое ожидание выигрыша) составит $p_1a_{1j} + p_2a_{2j} + \ldots + p_ma_{mj}$, $j = 1, \ldots, n$.

Игрок 1 стремится к тому, чтобы при любой стратегии игрока 2 его выигрыш был не менее чем цена игры γ и сама цена игры была максимальной. Такое поведение игрока 1 описывается следующей моделью линейного программирования:

$\gamma \to \max$ (игрок 1 стремится максимизировать свой выигрыш),

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{i1}p_i + \ldots + a_{m1}p_m \ge \gamma; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{i2}p_i + \ldots + a_{m2}p_m \ge \gamma; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \ldots + a_{ij}p_i + \ldots + a_{mj}p_m \ge \gamma; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{in}p_i + \ldots + a_{mn}p_m \ge \gamma. \end{array}\right\}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$$

$$p_i \ge 0, \quad \gamma > 0$$

или, обозначив $x_i = p_i/ \gamma$, имеем

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{i1}x_i + \ldots + a_{m1}x_m \ge 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{i2}x_i + \ldots + a_{m2}x_m \ge 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{1n}x_i + \ldots + a_{mn}x_m \ge 1, \end{cases}$$

$$f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_i + \ldots + x_m \to \min .$$

$$x_i \ge 0$$

Причем

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}; \quad p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i}, \ i = \overline{1,m}.$$

$$\nu = 1/(x_1 + x_2 + \ldots + x_m).$$

Поведению игрока 2 соответствует двойственная задача:

$$f(u) = u_1 + u_2 + \ldots + u_j + \ldots + u_n \to \max;$$

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1j}u_j + \ldots + a_{1n}u_n \le 1;$$

$$a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2j}u_j + \ldots + a_{2n}u_n \le 1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mj}u_j + \ldots + a_{mn}u_n \le 1,$$

$$u_j \geq 0, j = \overline{1,n}.$$

$$u_j = \frac{q_j}{\gamma}, j = \overline{1,n}.$$

$$\gamma = \frac{1}{f(x)_{\min}} = \frac{1}{f(u)_{\max}};$$

$$p_i = \gamma \cdot \chi_i, i = \overline{1,m}, \quad q_j = \gamma \cdot u_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Задача (1) всегда имеет решение. Получив ее оптимальное решение $x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*$, можно найти цену игры $\nu^* = 1/(x_1^* + x_2^* + ... + x_m^*)$, оптимальные значения $p_I^* = (p_1, p_2, ..., p_m)$ и, следовательно, оптимальную стратегию игрока 1. Если исходная матрица увеличивалась на *d,* то для получения цены первоначальной игры γ * нужно уменьшить на *d.*

Справедливо и обратное положение: любую задачу линейного программирования можно свести к решению соответствующей игры двух лиц с нулевой суммой.

2. Матричная игра двух лиц с ненулевой постоянной суммой

Конечная игра, в которой сумма выигрышей обоих игроков не равна нулю и постоянна для всех сочетаний их чистых стратегий, называется матричной игрой двух лиц с ненулевой постоянной суммой. Пусть $\{a_{ij}\}_{m,n}$— матрица выигрышей игрока 1 и $\{b_{ij}\}_{m,n}$ - матрица выигрышей игрока 2. Причем $a_{ij} + b_{ij} = c$ для всех $i = 1, ..., m;$ $j = 1, ..., n.$.

Такого рода игра сводится к игре двух лиц с нулевой суммой следующим образом:

1) каждому игроку выплачивается сумма *c*/2;

2) решается игра с нулевой суммой с матрицей выигрышей $\{a'_{ij}\}_{m,n}$ игрока 1, где $a'_{ij} = a_{ij} - c/2.$

Действительно, в игре с преобразованной таким способом матрицей выигрышей игрок 2 получает сумму $c/2 - a_{ij}$ для всех $i = 1, ..., m; j = 1, ..., n,$ т.е. новая игра является игрой с нулевой суммой. При этом каждый игрок ничего не теряет от того, что каждый из них в игре получает на $c/2$ меньше, поскольку по $c/2$ они получили перед игрой.

Пример. *Как завоевать рынок?*

Два конкурирующих друг с другом предприятия, выпускающие стиральные машины, имеют следующие доли общего сбыта своей продукции на местном рынке: 53% — предприятие 1 и 47% — предприятие 2.

Оба предприятия пытаются увеличить объем своих продаж. Для этого у них есть следующие альтернативы: a_1 (b_1) - расширить сеть сбыта; a_2 (b_2) — рекламировать свою продукцию; a_3(b_3) - увеличить ассортимент (число моделей стиральных машин); a_4 (b_4) - ничего не предпринимать.

Анализ показал, что при осуществлении обоими предприятиями указанных мероприятий доля (в %) предприятия 1 на рынке стиральных машин изменится следующим образом:

Стратегия предпр 2 / Стратегия предпр 1	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-4	-5	-1	6
A_2	-1	0	-3	5
A_3	-3	1	-5	5
A_4	-8	-7	-6	0

Сформулируйте данную ситуацию в виде игры.

Вопросы:

1. Какое из мероприятий предприятия 1 наиболее эффективно?

2. Какую долю на рынке будет иметь предприятие 1?

3. Какое из мероприятий предприятия 2 наиболее эффективно?

4. С какой частотой следует предприятию 2 использовать стратегию «реклама»?

Решение. Приведенную выше таблицу можно рассматривать как платежную матрицу игры двух лиц с нулевой суммой. Альтернативы, имеющиеся в распоряжении предприятий, — стратегии игроков. Прежде всего следует исключить доминируемые стратегии игроков: 04 игрока 1 и 64 игрока 2. В результате получим

Стратегия предпр 2 / Стратегия предпр 1	B_1	B_2	B_3
A_1	-4	-5	-1
A_2	-1	0	-3
A_3	-3	1	-5

Увеличив все элементы матрицы на 6, решим следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{i1}x_i + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{i2}x_i + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{1n}x_i + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1, \end{cases}$$

$$f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_i + \ldots + x_m \to \min .$$

Используя пакет *EXCEL,* получаем следующий результат:

	X_1	X_2	X_3			

Minimize	1	1	1			
Constraint 1	2	5	3	>=	1	-0.105
Constraint 2	1	6	7	>=	1	0
Constraint 3	5	3	1	>=	1	-0.158
Solution	-0.105	0	-0.158		0.26	

Переходя к переменным исходной задачи и учитывая, что $\gamma = 1/(x_1 + x_2 + x_3) = 3{,}85$ и $p_i = x_i\,\gamma$, получаем: $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}6$, $p_3 = 0$, $p_4 = 0$. Цена игры, соответствующая первоначальной матрице, равна –2,15 (3,85 – 6). Таким образом, предприятие 1 при многократном повторении игры должно использовать с частотой 0,4 стратегию a_1 (расширить сеть сбыта), с частотой 0,6 — стратегию a_2 (рекламировать свою продукцию), а стратегии a_3 (увеличить ассортимент) и a_4 (ничего не предпринимать) не использовать вовсе. При этом доля сбыта предприятия на рынке уменьшится на 2,15%. Оптимальная смешанная стратегия предприятия 2: с частотой 0,4 использовать стратегию b_1 (расширить сеть сбыта) и с частотой 0,6 — стратегию b_3 (увеличить ассортимент). Стратегии a_2 (рекламировать свою продукцию) и a_4 (ничего не делать) не применять вовсе. Доля предприятия 2 на рынке увеличится на 2,15%. Казалось бы, поскольку в результате осуществления своих мероприятий предприятие 1 «теряет рынок», ему не следует ничего предпринимать, однако в этом случае оно потеряет еще больше (в соответствии со стратегией a_4) из-за действий предприятия 2, которому они выгодны.

Ответы: 1. Реклама. 2. 50,85%. 3. Увеличение ассортимента. 4. С нулевой частотой, т.е. стратегия «реклама» предприятием 2 вообще не должна применяться.

3.4.7. Равновесие Нэша

Равновесие по Нэшу - это ситуация, когда ни у одного игрока нет стимулов изменять свою стратегию при данной стратегии другого игрока (другой фирмы), позволяющая игрокам достичь компромиссного решения.

Многие исследователи рассматривают теорию игр не как инструмент предсказания поведения, но как инструмент анализа ситуаций с целью выявления наилучшего поведения для рационального игрока. Поскольку равновесие Нэша включает стратегии, являющиеся наилучшим откликом на поведение другого игрока, использование концепции равновесия Нэша для выбора поведения выглядит вполне обоснованным. Однако и такое использование теоретико-игровых моделей подверглось критике.

Во-первых, в некоторых случаях игроку выгодно выбрать стратегию, не входящую в равновесие, если он ожидает, что другие игроки также не будут следовать равновесным стратегиям. Во-вторых, знаменитая игра «Дилемма заключенного» позволяет привести ещё один контрпример. В «Дилемме заключенного» следование личным интересам приводит к тому, что оба игрока оказываются в худшей ситуации в сравнении с той, в которой они пожертвовали бы личными интересами.

Определение равновесия по Нэшу и его существование определяется следующим образом.

Пусть (S, f) – это игра, в которой S – множество стратегий, f – множество выигрышей. Когда каждый из игроков $i \in \{1,...,n\}$ выбирает стратегию $x_i \in S$, где $x = (x_1,...,x_n)$, тогда игрок i получает выигрыш $f_i(x)$. Выигрыш зависит от стратегии, выбранной всеми игроками. Стратегия $x^* \in S$ является равновесием по Нэшу, если никакое отклонение от нее каким-то одним игроком не приносит ему прибыль, то есть, для всех i выполняется следующее неравенство:

$$f_i(x^*) \geq f_i(x_i, x^*_{-i})$$

Например, игра «дилемма заключенного» имеет одно равновесие по Нэшу – ситуацию, когда оба заключенных предают друг друга.

Рассмотрим неантагонистическую игру двух лиц с функциями выигрышей $H_1(x, y)$ и $H_2(x, y), x \in S_x, y \in S_y$. Исход игры будем называть *равновесным*, если ни одному из участников не выгодно отклоняться от нёё в одностороннем порядке. Именной такой смысл понятию равновесие придал Джон Нэш. Запишем строгое определение *равновесия по Нэшу*.

Стратегии $x_N \in S_x$ и $y_N \in S_y$ называются *стратегиями равновесными по Нэшу*, если выполняются следующие неравенства:

$$H_1(x_N, y_N) \geq H_1(x, y_N) \; \forall \, x \in S_x$$
$$H_2(x_N, y_N) \geq H_2(x_N, y) \; \forall \, y \in S_y.$$

Таким образом, равновесие Нэша характеризуется тем, что ни одному из участников не выгодно отклоняться от своей равновесной стратегии, если другой участник применяет стратегию, равновесную по Нэшу. Заметим, что это определение сохраняется и для игры с любым числом участников.

Существуют игры, в которых нет равновесия в чистых стратегиях. Кроме равновесия в чистых стратегиях случае, может существовать равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Смысл смешанной стратегии для биматричной игры будем определять так же, как и для матричных игр. Смешанная стратегия первого и второго участников есть соответственно вектора $X=\{x_1, x_2, \ldots x_m\}$ и $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, где $0 \leq x_i \leq 1$ $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ и $0 \leq y_j \leq 1$ $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$

Множества смешанных стратегий будем обозначать так же, как множества чистых стратегий – S_x для 1-го игрока и S_y для 2-го.

Функции выигрышей первого и второго игроков при смешанных стратегиях X и Y определяются по формулам

$H_1(x,y)=\sum a_{ij}x_iy_j$, $H_2(x,y)=\sum b_{ij}x_iy_j$

Равновесные по Нэшу смешанные стратегии будем обозначать X^* и Y^* соответственно. Вопрос существования равновесия по Нэшу решается следующей теоремой, доказанной Дж. Нэшем.

Теорема о равновесии по Нэшу. В любой биматричной игре существует, по крайней мере, одно равновесие Нэша. (Без доказательства).

Замечание. Это могут быть равновесия в чистых или смешанных стратегиях.

В общем случае биматричной игры нахождение смешанных равновесий является сложной задачей, но для матриц размера 2x2 решение в смешанных стратегиях найти несложно.

Рассмотрим биматричную игру, в которой каждый игрок имеет две чистые стратегии. Смешанные стратегии игроков будем обозначать $x=\{x_1, x_2\}$ и $y=\{y_1, y_2\}$ соответственно, где $0\le x_i\le 1$, $0\le y_j\le 1$, $x_1+x_2=1$, $y_1+y_2=1$. Обозначая элементы платежных матриц 1-го и 2-го игроков a_{ij} и b_{ij} соответственно, получим Таблицу1 и Таблицу 2 для расчета функций выигрыша.

Таблица 1

	y_1	y_2
x_1	a_{11}	a_{12}
x_2	a_{21}	a_{22}

Таблица 2

	y_1	y_2
x_1	b_{11}	b_{12}
x_2	b_{21}	b_{22}

Функция выигрыша 1-го игрока будет равна

$H_1(x,y)= x_1(a_{11} y_1+ a_{12} y_2)+ x_2(a_{21} y_1+ a_{22} y_2)$,

подставляя $x_2=1- x_1$ и $y_2=1- y_1$, получим

$H_1(x,y)= x_1(y_1(a_{11}+ a_{22}- a_{12}-a_{21})+ a_{12}-a_{22})+ y_1(a_{21}- a_{22})+ a_{22}$.

Обозначим $x^*=\{x_1^*, x_2^*\}$ и $y^*=\{y_1^*, y_2^*\}$ равновесные по Нэшу стратегии игроков и найдем функцию выигрыша 1-го игрока, при условии, что 2-й игрок применит равновесную по Нэшу стратегию y^*, а 1-й игрок применит произвольную смешанную стратегию x

$H_1(x,y^*)= x_1(y_1^*(a_{11}+ a_{22}- a_{12}-a_{21})+ a_{12}-a_{22})+ y_1^*(a_{21}- a_{22})+ a_{22}$. (2.1)

Если 2-й игрок применит равновесную по Нэшу стратегию y^*, и 1-й игрок применит равновесную по Нэшу стратегию x^*, то функция выигрыша 1-го игрока будет равна

$H_1(x^*,y^*)= x_1^*(y_1^*(a_{11}+ a_{22}- a_{12}-a_{21})+ a_{12}-a_{22})+ y_1^*(a_{21}- a_{22})+ a_{22}$. (2.2)

Согласно определению равновесия по Нэшу для всех смешанных стратегий x должно выполняться неравенство

$H_1(x^*,y^*)\geq H_1(x,y^*)$. (2.3)

Подставляя в неравенство $H_1(x^*,y^*)- H_1(x,y^*)\geq 0$ функции из уравнений (4) и (5), получим неравенство

$(x_1^*- x_1)(y_1^*(a_{11}+ a_{22}- a_{12}-a_{21})+ a_{12}-a_{22}) \geq 0$, (2.4)

которое должно выполняться для всех значений x_1 из отрезка [0;1].

Интерес представляет случай, когда равновесная по Нэшу стратегия x^* не совпадает ни с одной чистой стратегией, то есть, когда x_1^* удовлетворяет строгому неравенству $0< x_1^*<1$. В этом случае неравенство (2.4) будет верно для всех x_1 из отрезка [0;1] тогда и только тогда, когда

$y_1^*(a_{11}+ a_{22}- a_{12}-a_{21})+ a_{12}-a_{22}=0$. (2.5)

Уравнение (2.5) дает значение y_1^*, при котором существует смешанная стратегия x^*, не совпадающая с чистыми стратегиями 1-го игрока.

Аналогично, для всех смешанных стратегий у 2-го игрока должно выполняться неравенство

$H_2(x^*,y^*) \geq H_2(x^*,y)$ (2.6)

Определяя функции $H_2(x^*,y)$ и $H_2(x^*,y^*)$ из таблицы 2, получим условие, при котором 2-й игрок имеет равновесную смешанную стратегию y^*. не совпадающую с его чистыми стратегиями

$x_1^*(b_{11}+b_{22}-b_{12}-b_{21})+b_{21}-b_{22}=0.$ (2.7)

Если уравнения (2.10) или (2.12) не имеют решений на отрезке [0;1], то в игре существуют только равновесия в чистых стратегиях, существование которых непосредственно следует из неравенств (2.5) и аналогичного неравенства для 2-го игрока.

Проще всего определить равновесие по Нэшу можно по платежной матрице, особенно в случаях, когда в игре участвуют два игрока, имеющие в арсенале более двух стратегий. Так как в этом случае формальный анализ будет достаточно сложным, применяется мнемоническое правило, которое заключается в следующем: ячейка платежной матрицы представляет собой равновесие по Нэшу, если первое число, стоящее в ней, является максимальным среди всех значений, представленных в столбцах, а второе число, стоящее в ячейке – максимальное число среди всех строк.

Например, применение этого правила для матрицы 3х3:

	A	B	C
A	0, 0	**25, 40**	5, 10
B	**40, 25**	0, 0	5, 15
C	10, 5	15, 5	**10, 10**

Точки равновесия по Нэшу: (B,A), (A,B), и (C,C). Indeed, for cell (B,A), так как 40 - максимальное значение в первом столбце, 25 максимальное значение во втором ряду. Для ячейки (A,B) 25- это максимальное значение во втором столбце, 40 - максимальное значение во втором ряду. То же самое и для ячейки (C,C).

Рассмотрение примера игры в загрязнения (окружающей среды). Здесь объектом внимания станет такой вид побочных эффектов производства, как загрязнение. Если бы фирмы никогда и никого не спрашивали о том, как им поступить, любая из них скорее предпочла бы создавать загрязнения, чем устанавливать дорогостоящие очистители. Если же какая-нибудь фирма решилась бы уменьшить вредные выбросы, то издержки, а, следовательно, и цены на ее продукцию, возросли бы, а спрос бы упал. Вполне возможно, эта фирма просто обанкротилась бы. Живущие в жестоком мире естественного отбора, фирмы скорее предпочтут оставаться в условиях равновесия по Нэшу (ячейка D), при котором не нужно расходовать средства на очистные сооружения и технологии. Ни одной фирме не удастся повысить прибыль, уменьшая загрязнение.

	Фирма 1	
Фирма 2	Низкий уровень загрязнения	Высокий уровень загрязнения
Низкий уровень загрязнения	A 100,100	B -30,120
Высокий уровень	C	D

загрязнения	120,-30	100,100

Рис. 4. Платежная матрица игры в загрязнение окружающей среды.

Вступив в экономическую игру, каждая неконтролируемая государством и максимизирующая прибыль сталелитейная фирма будет производить загрязнения воды и воздуха. Если какая-либо фирма попытается очищать свои выбросы, то тем самым она будет вынуждена повысить цены и потерпеть убытки.

Некооперативное поведение установит равновесие по Нэшу в условиях высоких выбросов. Правительство может предпринять меры с тем, чтобы равновесие переместилось в ячейку А. В этом положении загрязнение будет незначительным, прибыли же останутся теми же.

Игры загрязнения - один из случаев того, как механизм действия «невидимой руки» не срабатывает. Это ситуация, когда равновесие по Нэшу неэффективно. Иногда подобные неконтролируемые игры становятся угрожающими, и здесь может вмешаться правительство. Установив систему штрафов и квот на выбросы, правительство может побудить фирмы выбрать исход А, соответствующий низкому уровню загрязнения. Фирмы зарабатывают ровно столько же, сколько и прежде, при больших выбросах, мир же становится несколько чище.

3.4.9. Решение матричных игр в смешанных стратегиях с помощью Excel

Имеются два предприятия, которые в дополнение к основной продукции могут выпускать побочную продукцию одного и того же назначения — пластмассовые игрушки. Известно, что они могут продавать ее в одном и том же городе. Игрушки немного отличаются по конструкции, оформлению, удобству и т.д. Первое предприятие может выпускать игрушки типа $A_1, A_2, \ldots, A_m$; второе — типа $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Себестоимость и цена игрушек у всех предприятий одинаковы. Всего в течение года продается N игрушек. Если первое предприятие выпускает игрушки типа A_i, а второе — типа B_j, то первое предприятие продаст $r_{ij}N$ игрушек, а второе — $(N - r_{ij}N)$. Каждое предприятие стремится получить максимальный доход от продажи игрушек.

Пусть $m = 4$, $n = 5$, $N = 300\ 000$, цена (равновесная) одной игрушки составляет 20 руб., элементы матрицы $\{r_{ij}\}_{4,5}$ представлены в таблице:

Игрушки предприятия 1 \ Игрушки предприятия 2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0,2	0,7	0,4	0,8	0,3
A_2	0,8	0,5	0,1	0,3	0,7
A_3	0,4	0,6	0,9	0,5	0,6
A_4	0,7	0,3	0,5	0,3	0,5

Сформулируйте игру двух лиц, считая игроком 1 первое предприятие. Определите выигрыш (доход от продажи) каждого предприятия.

Вопросы:

1. Каков общий средний доход первого предприятия?

2. Каков общий средний доход второго предприятия?

3. Какое изделие следует выпускать первому предприятию с наибольшей вероятностью?

4. Какое изделие следует выпускать второму предприятию с наибольшей вероятностью?

5. Какова частота применения стратегии «Выпускать изделие B_2»?

Решение.

Данная игра — это игра двух лиц с ненулевой постоянной суммой. Сумма выигрышей обоих игроков при любых сочетаниях стратегий предприятий равна 6 (все числа в матрице выигрышей даны в миллионах). Сведем ее к игре двух лиц с нулевой суммой. Для этого до игры каждому предприятию выплачивается половина постоянной суммы, т.е. 3, а из выигрыша каждого предприятия (из элементов матрицы) вычитается 3. Полученная матрица соответствует игре с нулевой суммой, поэтому достаточно указать в ней только выигрыши одного (первого) предприятия. После необходимых расчетов матрица игры имеет вид

Игрушки предприятия 1 \ Игрушки предприятия 2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	–1,8	1,2	–0,6	1,8	–1,2
A_2	1,8	0	–2,4	–1,2	1,2
A_3	–0,6	0,6	2,4	0	0,6
A_4	1,2	–1,2	0	–1,2	0

Прибавим к матрице число 3, чтобы все ее элементы были положительными. Матрица задачи и решение показаны в следующей таблице:

Minimize	1	1	1	1			
Ctr 1	1,2	4,8	2,4	4,2	>=	1	–0,146
Ctr 2	4,2	3	3,6	1,8	>=	1	0
Ctr 3	2,4	0,6	5,4	3	>=	1	–0,034
Ctr 4	4,8	1,8	3	1,8	>=	1	–0,155
Ctr 5	1,8	4,2	3,6	3	>=	1	0
Solution	0,08	0,12	0,14	0		0,34	

Цена преобразованной игры равна 1/0,34 = 2,94.

Оптимальная смешанная стратегия игрока 1 (частоты использования игроком 1 своих стратегий) P = (0,23; 0,36; 0,41; 0).

Для игрока 2 оптимальная смешанная стратегия Q = (0,43; 0; 0,1; 0,47; 0). Цена исходной игры с нулевой суммой равна —0,06. Поскольку оба игрока получили по 3 млн руб., общий доход первого предприятия составляет 2,94 млн руб., доход второго предприятия равен 3,06 млн руб.

Ответы: 1. 2,94 млн руб. 2. 3,06 млн руб. 3. Изделие A_3 4. Изделие B_4 5. Частота применения стратегии «Выпускать изделие B_2» равна нулю.

Пример. *Выбор альтернативы.*

Компания «Буренка» изучает возможность производства и сбыта навесов для хранения кормов. Проект может основываться на большой или малой производственной базе. Рынок для реализации навесов может быть благоприятным или неблагоприятным.

Василий Бычков - менеджер компании — учитывает возможность вообще не производить эти навесы. При благоприятной рыночной ситуации большое производство позволило бы Бычкову получить чистую прибыль 200 тыс. руб. Если рынок окажется неблагоприятным, то при большом производстве компания понесет убытки в размере 180 тыс. руб. Малое производство дает 100 тыс. руб. прибыли при благоприятной рыночной ситуации и 20 тыс. руб. убытков при неблагоприятной.

Вопрос: Какую альтернативу следует выбрать?

Решение. Применим перечисленные выше критерии. Составим таблицу решений (k = 0,75):

Альтернатива \ Состояние среды		Благоприятный рынок	Неблагоприятный рынок	Maximax	Maximin	Критерий Сэвиджа	Критерий Гурвица	Критерий безразличия
A_1	Создать большое производство	**200**	−180	**200**	−180	180	−85	10
A_2	Создать малое производство	**100**	−20	100	−20	**100**	10	**40**
A_3	Ничего не делать	0	0	0	**0**	200	**50**	0

Пример 2. Имеется три участка земли, отличающихся по степени влажности. Возможные стратегии сельскохозяйственного предприятия (A_1, A_2, A_3) состоят в том, что оно может высаживать некоторую культуру на участках 1, 2 или 3. Урожайность на любом из трех участков, естественно, зависит от количества осадков, выпавших в период вегетации. Обозначим возможные варианты погодных условий (стратегии природы) через П1, П2 и П3, где П1 - соответствует выпадению осадков ниже нормы, П2 – нормальному количеству осадков, и П3 – количеству осадков ниже нормы.

Выигрыш сельскохозяйственного предприятия естественно ассоциировать с урожайностью культуры с 1 гектара. Платежная матрица, т.е. совокупность значений урожайности для каждой стратегии предприятия и природы, приведена ниже.

Платежная матрица примера 2.

	П1	П2	П3
А1	220	200	110
А2	200	230	150
А3	130	240	260

Пусть на основе обработки многолетних статистических данных о погодных условиях в данном регионе получены следующие значения вероятностей засушливого, нормального по количеству осадков и дождливого сезонов: $q_1 = 0{,}25$; $q_2 = 0{,}42$; $q_3 = 0.33$. Требуется выбрать стратегию, обеспечивающую максимальный средний выигрыш (максимальный средний урожай).

Решение.Введем данные на рабочий лист в соответствии с Рис.

	A	B	C	D	E
1		Погодные условия			
2	Стратегия сельскохозяйственного предприятия	$П_1$	$П_2$	$П_3$	Средний выигрыш (средняя урожайность)
3	A_1	220	200	110	
4	A_2	200	230	150	
5	A_3	130	240	260	
6		Максимальный средний выигрыш			
7		Оптимальная стратегия			
8					
9					
10					
11		Вероятность $П_1$ (меньше нормы)	Вероятность $П_2$ (норма)	Вероятность $П_3$ (больше нормы)	
12		q_1	q_2	q_3	
13		0,25	0,42	0,33	

Рис. Данные для решения примера 1.

В ячейку E3 введем формулу для определения среднего выигрыша

=СУММПРОИЗВ(B3:D3;$B$13:$D$13)

и скопируем ее в ячейки E4, E5. В ячейку E6 введем формулу для определения максимального среднего выигрыша =МАКС(E3:E5); наконец, в ячейку E7 введем логическую функцию, с помощью которой будет автоматически определяться оптимальная стратегия поведения предприятия:

=ЕСЛИ(И(E3>E4;E3>E5);A3;ЕСЛИ(И(E4>E3;E4>E5);A4;A5)).

В результате получим следующее решение задачи

Стратегия сельскохозяйственного предприятия	$П_1$	$П_2$	$П_3$	Средний выигрыш (средняя урожайность)
A_1	220	200	110	175,3
A_2	200	230	150	196,1
A_3	130	240	260	219,1
	Максимальный средний выигрыш			219,1
	Оптимальная стратегия			А3

В условиях полной неопределенности, в отличие от только что рассмотренного случая, используется ряд критериев, не требующих знания вероятностей состояний природы. Наиболее широко используемыми являются при этом критерии **Вальда**, **Сэвиджа** и **Гурвица**.

Решение в этом случае совпадает с решением, полученным в примере 1 по критерию безразличия.

Ответ: Следует выбрать альтернативу A_2

Пример 3. Принятие решения об использовании дополнительной информации.

Предположим, что менеджер компании «Буренка» (см. пример 1) связался с фирмой, занимающейся исследованием рынка, которая предложила ему помощь в принятии решения о том, стоит ли создавать производство навесов для хранения кормов. Исследователи рынка утверждают, что их анализ позволит установить с полной определенностью, будет ли рынок благоприятным для данного продукта. Другими словами, условия для компании «Буренка» меняются от принятия решений в условиях риска к принятию решений в условиях определенности. Эта информация может предостеречь Бычкова от очень дорогостоящей ошибки. Фирма, занимающаяся исследованием рынка, хотела бы получить за эту информацию 65 тыс. ден.ед.

Вопрос: Следует ли воспользоваться услугами указанной фирмы? Даже если результаты исследования являются совершенно точными, оправдана ли плата 65 тыс. ден.ед.?

Решение. 1. Лучший исход для состояния среды «благоприятный рынок» - «создать большое производство» с выигрышем 200 тыс. ден.ед., а для состояния среды «неблагоприятный рынок» - «ничего не делать» с выигрышем 0. Ожидаемая стоимостная оценка в условиях определенности равна 200 • 0,5 + 0 • 0,5 = 100 тыс. ден.ед.

Итак, если бы мы располагали достоверной информацией, мы ожидали бы получить в среднем 100 тыс. ден.ед.

2. Максимум *EMУ* равен 40 тыс. ден.ед. Это размер ожидаемого дохода без достоверной информации.

3. *EVPI*= Ожидаемая стоимостная оценка в условиях определенности — Максимум *EMV* = 100 — 40 = 60 тыс. ден.ед.

Итак, Бычкову следовало бы платить за достоверную информацию не более 60 тыс. ден.ед.Конечно, такой вывод основывается на предположении, что вероятность реализации каждого состояния среды равна 0,5.

Ответ: Приобретать достоверную информацию не следует.

Пример 4. *Взаимосвязанные решения.*

Предположим, что Бычкову (см. пример 1) надо принять два решения, причем второе решение зависит от исхода первого. Прежде чем создать новое производство. Бычков намерен заказать исследование рынка и заплатить за него 10 тыс. ден.ед. Результаты этого исследования могли бы помочь решить вопрос о том, следует ли создавать большое производство, малое производство или не делать ничего. Бычков понимает, что такое обследование рынка не может дать достоверную информацию, но может тем не менее оказаться полезным.

Вопрос: Следует ли проводить обследование рынка?

Решение. На рис. 1 показаны возможные состояния среды и решения, а также вероятности различных результатов обследования и вероятности наступления различных состояний среды. (Прямоугольники используются для обозначения вершин принятия решений, кружочки обозначают неконтролируемые события — наступление состояний среды.)

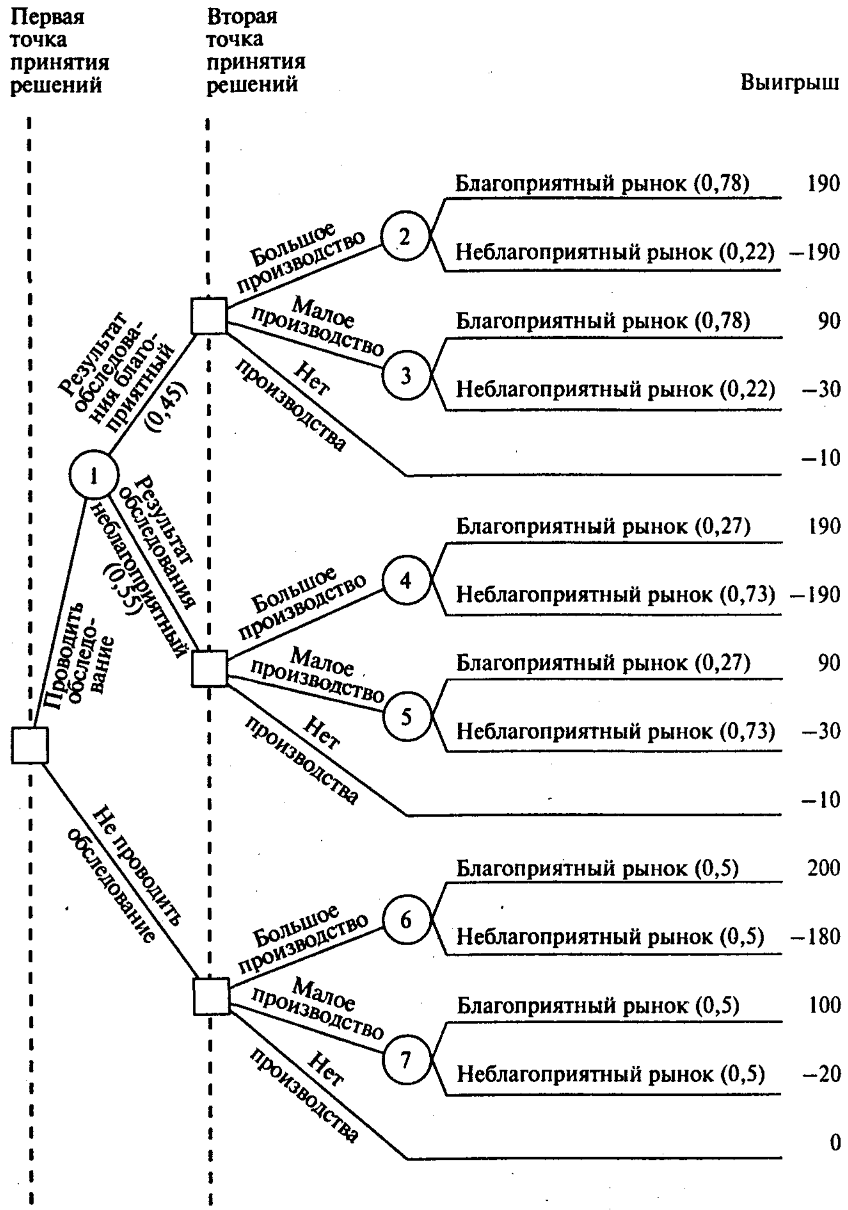


Рис. 1

Дерево решений Бычкова с рассчитанными *EMV* представлено на рис. 2. Короткими параллельными линиями отсекается та ветвь, которая оказывается менее благоприятной по сравнению с другими и может быть отброшена.

Ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения в случае, если будет заказано обследование рынка, составляет 49,2 тыс. ден.ед.., без обследования она составляет 40 тыс. ден.ед

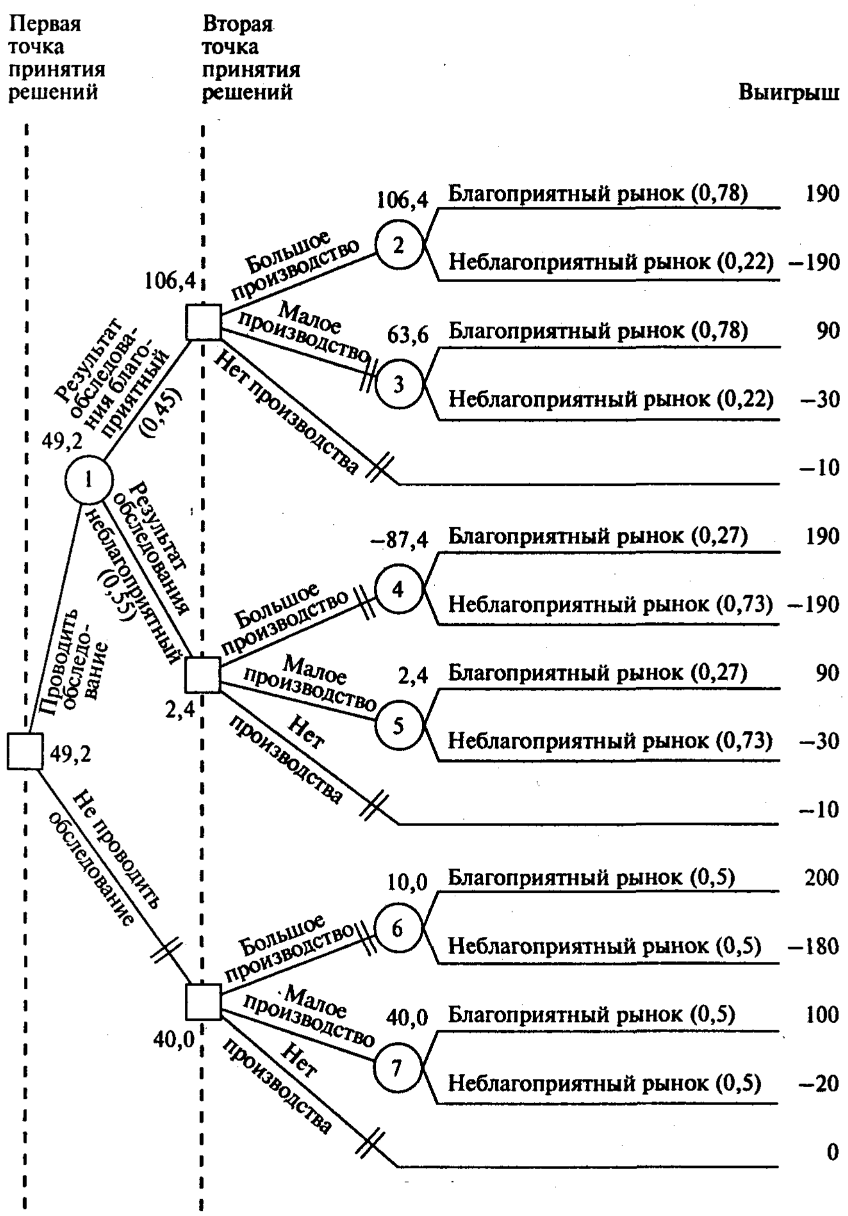


Рис.2

Ответ: Да, следует заказывать обследование рынка. Если результат обследования будет благоприятным, следует создавать большое производство, если неблагоприятным - малое.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятия «природа».

2.С неопределенностью какого вида связано принятие решений в игре с природой? Чем она порождается?

3.Можно ли в игре с природой применить доминирование стратегий?

4.Всегда ли матрица выигрышей адекватно отражает имеющуюся ситуацию?

5.Что такое показатель благоприятности?

6.Дайте определение понятия «риск».

7.Являются ли одинаковые выигрыши при разных стратегиях и одинаковом состоянии природы равноценными?

8.Всегда ли у игроков есть смешанная стратегия?

9.Назовите две возможные ситуации при принятии решений в игре с природой.

10.Назовите критерии принятия решений в условиях полной неопределенности.

11.В какой ситуации оправдано применение максиминного критерия Вальда?

12. Каким образом следует выбирать показатели пессимизма и оптимизма по критерию Гурвица? Что они характеризуют?

13.Можно ли применить критерий Гурвица к матрице рисков?

14.Назовите критерии принятий решений в условиях риска.

15.Объясните разницу между идеальным и неидеальным экспериментом.

16.Что такое дерево решений?

17.Назовите основные этапы решения задачи с помощью дерева решений.

18.Что такое смешанная стратегия?

19. Что такое цена игры?

20. Составляют ли оптимальные стратегии ситуацию равновесия?

21. Для решения каких игр подходит геометрический метод?

22. Как ищут решение парной игры с нулевой суммой произвольной размерности?

23. Какая задача называется задачей линейного программирования?

24. Что такое равновесие по Нэшу?

25. Каковы основные преимущества итерационного метода?

26. Приведите алгоритм решения матричной игры сведением к задаче линейного программирования.

ГЛАВА 4. КООПЕРАТИВНЫЕ РЕШЕНИЯ

4.1. Понятие коалиционной игры

В экономике отдельные субъекты редко действуют поодиночке. Чаще всего они объединяются в союзы, коллективы, кооперации для достижения своих целей. Интуиция и практика показывают, что коллективные действия могут существенно увеличивать эффективность их участников. Коллективные действия можно разделить на три ступени взаимодействия:

а) обмен информацией;

б) совместный выбор стратегий участников (договор о совместных действиях);

в) объединение ресурсов и последующий выбор совместных действий на основе объединенных ресурсов.

Математические модели конфликтов, участники которых могут предпринимать коллективные действия, изучаются в теории коалиционных игр. *Коалиционной* игрой называется игра с непротивоположными интересами, в которой игроки могут обсуждать перед игрой свои стратегии, договариваться о совместных действиях, заключать союзы (коалиции) для объединения ресурсов.

Коалиция представляет собой добровольное объединение участников игры, согласившихся осуществлять совместные действия (совместные стратегии). Объединение игроков в коалицию означает их сотрудничество, согласие по поводу выбора общего, т.е. *кооперативного* решения. Общее решение всех участников коалиции определяет стратегию коалиции. Возможны случаи, когда участники игры объединяются в коалицию только для осуществления коалиционной стратегии, а после этого коалиция распадается.

С математической точки зрения, коалиция представляет собой некоторое подмножество участников игры. Обозначим *I={i} (i=1,2,…n)* множество игроков, произвольную коалицию будем обозначать *K*. Общее число всех возможных коалиций, т.е. всех подмножеств множества I, включая пустое подмножество, равно $2^n = \sum_{m=1}^{n} C_n^m$, где C_n^m – число сочетаний *m* по *n*. Число сочетаний C_n^m является количеством всех всевозможных коалиций на множестве из n игроков, в каждую из которых входят m участников.

Формальное описание полностью определенной коалиционной игры можно задать с помощью следующих параметров:

1. Множество участников $\{q\} = G, g \in G$.
2. Множество всех коалиций $K = \{K\}$, где отдельная коалиция $K \in \mathrm{K}$ является подмножеством множества *G*, т.е. $K \subset G$, включая пустое множество игроков.

K – коалиционное разбиение множества игроков.

3. Для каждой коалиции $\forall K \in \mathrm{K}$ должно быть определено множество (набор) стратегий $X_K=\{x_K\}$
4. Множество исходов игры $S=\prod X_K$, где исход s€S определяется выбором коалициями своих стратегий x_K.
5. Для каждого исхода игры s€S и каждой коалиции $K \in \mathrm{K}$ определён общий выигрыш коалиции $H_K(s)$.
6. $\forall K \in \mathrm{K}$ определена схема дележа выигрыша коалиции $H_K(s)$ между участниками коалиции при каждом исходе *x*

$$H_K(s)=\sum h_i(s)$$

где $h_i(s)$ – выигрыш игрока i из коалиции *K*.

Исход коалиционной игры при заданных стратегических возможностях всех игроков определяется, во-первых, разбиением множества игроков на коалиции, (т.е. коалиционным разбиением K множества *I*), во-вторых, множествами возможных стратегий каждой из коалиций, в-третьих, стратегиями, которые коалиции выбирают из своих наборов стратегий.

Игровые возможности каждой отдельной коалиции *K* могут быть определены с помощью ее *характеристической функции* v_K, равной гарантированному математическому ожиданию выигрыша данной коалиции при применении смешанной стратегии, составленной из стратегий $X_K=\{x_K\}$.

Смысл характеристической функции поясним на следующем примере.

Пример «*Война за ресурс*»

Три страны борются за владение нефтяным месторождением. Если они договорятся о долевой эксплуатации, то их суммарный доход составит 111 единиц. Если две страны объединятся для войны против третьего, то с учетом издержек на ведение войны суммарный доход уменьшится. Пусть каждая из двух образовавшихся коалиций имеет две стратегии – оборонительную и наступательную. Для коалиционного разбиения *{1-е и 2-е}* против *{3-го}* доходы сторон в зависимости от исходов игры приведены в таблице 1. Для коалиционного разбиения *{1-е и 3-е}* против *{2-го}* доходы сторон в зависимости от исходов игры приведены в таблице 2. Для коалиционного разбиения *{2-е и 3-е}* против *{1-го}* доходы сторон в зависимости от исходов игры приведены в таблице 3. Если каждая страна будет воевать против двух других, то в результате

1-е получит доход 30 единиц, 2-е и 3-е получат по 15 единиц. Найдем характеристические функции каждой из коалиций.

Таблица 1

1-е и 2-е | 3-е	оборона	наступление
оборона	90; 10	50; 50
наступление	50; 50	90; 10

Таблица 2

1-е и 3-е | 2-е	оборона	наступление
оборона	80; 20	50; 50
наступление	50; 50	80; 20

Таблица 3

2-е и 3-е | 1-е	оборона	наступление
оборона	60; 40	50; 50
наступление	50; 50	60; 40

Решение.

Рассмотрим игру, заданную таблицей 1. Легко обнаружить, что в игре нет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях и найти равновесные смешанные стратегии каждого их игроков $x^*= \{1/2;1/2\}$, $y^*= \{1/2;1/2\}$. При этих стратегиях все исходы равновозможны, следовательно, гарантированное ожидание выигрыша коалиции *{1-е и 2-е}*, т.е. характеристическая функция *v{1-е и 2-е}*=(90+50+50+90)/4=70. Характеристическая функция коалиции, состоящей из одного игрока (3-е королевство) *v{3-е}* =(10+50+50+10)/4=30.

Аналогично, из таблицы 2 находим характеристические функции

v{1-е и 3-е}=(80+50+50+80)/4=65, *v{2-е}* =(20+50+50+20)/4=35.

Из таблицы 3 находим характеристические функции

v{2-е и 3-е}=(60+50+50+60)/4=55, *v{1-е}* =(40+50+50+40)/4=45.

Война всех против всех будет невыгодна каждой из рассмотренных коалиций, т.к. в ней соответствующие характеристические функции принимают меньшие значения. Наконец, при договоре о долевой эксплуатации месторождения, коалиционное разбиение имеет вид

K=*{1-е и 2-е и 3-е }U*Ω, характеристическая функция коалиции *{1-е и 2-е и 3-е}* равна 111.

По отношению к коалиционной игре большое значение имеют следующие вопросы:

1) При каких условиях данный игрок вступает в ту или иную коалицию?

2) Как следует производить делёж общего выигрыша между членами одной коалиции?

3) Насколько устойчивы различные коалиции, и что влияет на их устойчивость?

4) Каким условиям должен соответствовать механизм принятия решений в отдельной коалиции?

В рассмотренном выше примере легко найти ответы на первые два вопроса. 1-я страна, действуя в одиночку против двух других, получает гарантированное математическое ожидание дохода, равное 45, 2-е – 35, 3-е – 30. Если страны являются рациональными игроками, то они будут вступать в коалиции только в тех случаях, когда их доли в дележе будут не меньше значений 45, 35 и 30 соответственно. Коалиции из двух игроков не могут обеспечить такие значения: *v{1-е и 2-е}*=70<45+35 и т.д. Единственным разумным коалиционным решением будет объединение всех трех в одну коалицию. Дележ 111 единиц между членами коалиции должен обеспечивать участникам доли, не меньшие тех, которые они получили бы, действуя в одиночку, т.е. *v{1-е и 2-е и 3-е}*=111=45+35+30+1, оставшаяся 1 может служить предметом торга.

Для общего случая коалиционной игры ответы на эти вопросы не так очевидны и требуют введения дополнительных понятий.

4.2. Определение решения игры

Исход можно считать оптимальным только в том случае, если он может быть реализуем в условиях, когда каждая коалиция выбирает стратегии, направленные на наиболее предпочитаемые ею исходы игры. Будем обозначать $S=\{s\}$ множество всех исходов коалиционной игры, $X_K=\{x_K\}$ множество стратегий коалиции K, $S(x_K)$ подмножество исходов, которые могут реализоваться при использовании коалицией K стратегии x_K.

Введем следующие определения.

Определение 1. Пару (K, x_K), где $X_K=\{x_K\}$ непустое множество, будем называть *угрозой* против исхода s, если все исходы из подмножества $S(x_K)$ более предпочтительны для коалиции K, чем исход s. Будем в этом случае говорить, что коалиция K имеет угрозу x_K против исхода s.

Определение 2. Пару (Q, x_Q), где $X_Q=\{x_Q\}$ непустое множество, будем называть *контругрозой* против угрозы (K, x_K), если $Q\cap K$ непустое множество и существует по крайней мере один исход s’ из подмножества $S(x_K)$, который менее предпочтителен, чем все исходы из подмножества $S(x_Q)$. Будем в этом случае говорить, что коалиция Q имеет контругрозу x_Q на угрозу x_K коалиции K.

Определение 3. Угроза называется *эффективной*, если на нее нет контругрозы.

Определение 4. *Оптимальными* называются те исходы игры, против которых нет эффективных угроз. Множество всех оптимальным решением будем называть *V-решением* коалиционной игры, или просто решением игры.

Выясним содержательный смысл введенных определений. Пусть s некоторый исход. Если есть коалиция K, которая с помощью стратегии x_K может добиться исходов $S(x_K)$, более благоприятных для нее, чем s, то она заинтересована в в том, чтобы исключить исход s из числа возможных и может это сделать с помощью стратегии x_K. Поэтому x_K является угрозой против исхода s. Но, с другой стороны, само существование коалиции K тоже может находиться под угрозой. Если существует коалиция Q, имеющая общих игроков с коалицией K, и применение коалицией Q некоторой стратегии x_Q приводит к исходам, более благоприятным для Q, чем один из исходов, к которым приводит стратегия x_K, то часть игроков из K может предпочесть участие в коалиции Q. Тогда образование коалиции Q может помешать образованию коалиции K, а значит помешать реализации угрозы x_K против исхода s. Угроза x_K в этом случае не является эффективной, и реализации исхода s ничто не мешает.

Таким образом, исход будет оптимальным, или потенциально реализуемым, если ни одна коалиция не заинтересована в том, чтобы исключить его из числа возможных, или каждая коалиция, которая заинтересована в этом, не может этого сделать. Применение *V-решения* дает возможность не рассматривать как оптимальные те исходы, против которых есть эффективные угрозы, т.е. сужает множество потенциально реализуемых исходов, что упрощает решение задачи на практике.

Пример. Парламент, состоящий из депутатов $I=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ выбирает решения из множества $S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Депутат *a* предпочитает все исходы 1,2,3 исходу 4, и все исходы 4,5,6 исходу 1. Депутат *a* может войти в коалицию K={*a*,*b*,*c*}, которая также предпочитает исходы 1,2,3 исходу 4, и может применить стратегию x_K, в результате которой может реализоваться один из исходов 1,2,3. Но *a* может войти в коалицию Q={*a*, *d*,*e*,*f*,*g*}, которая предпочитает исходу 1 любой исход из множества исходов {5,6,7}, к которым приводит стратегия x_Q. Другие коалиции кроме K и Q не могут организоваться в силу личных пристрастий депутатов. Является ли исход 4 оптимальным?

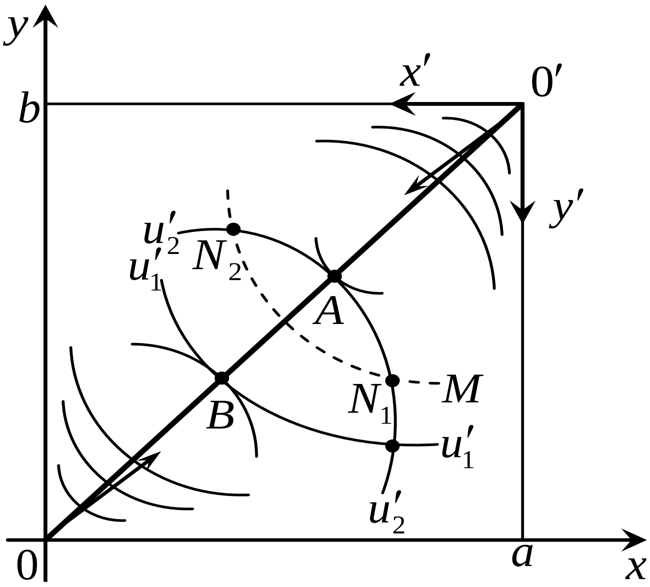
Решение.

Депутат *a* может предпочесть войти в коалицию Q, т.к. у нее есть стратегия x_Q, исключающая неблагоприятный для *a* исход 1. Следовательно, коалиция K может распасться, и стратегия x_K, угрожающая решению 4 может не осуществиться. Следовательно, исход 4 нельзя исключить из числа потенциально реализуемых, т.е. оптимальных исходов.

4.3. Эффективность обмена. Ящик Эджворта

Рассмотрим экономику, в которой имеется два участника, которые могут обмениваться двумя благами. Суммарное количество первого блага обозначим *a*, суммарное количество второго блага – *b*. Пусть первоначально первый участник имел набор благ (x_0, y_0), а второй – $(a - x_0, b - y_0)$. Могут ли при этом участники улучшить своё нынешнее положение, обмениваясь между собой благами, т.е. вступать в коалиции? Будем считать, что заданы функции полезности: $u_1(x, y)$ – для первого участника и $u_2(x, y)$ – для второго. Будем также считать, что издержки на получение информации, заключение контрактов и поиск партнёров (трансакционные издержки) равны нулю.

Для ответа на этот вопрос Эджворт предложил свою модель – *Ящик Эджворта*.



Изобразим карту кривых безразличия для каждого из участников (см. рис.). Можно ли улучшить положение первого участника, не ухудшая при этом положение второго.

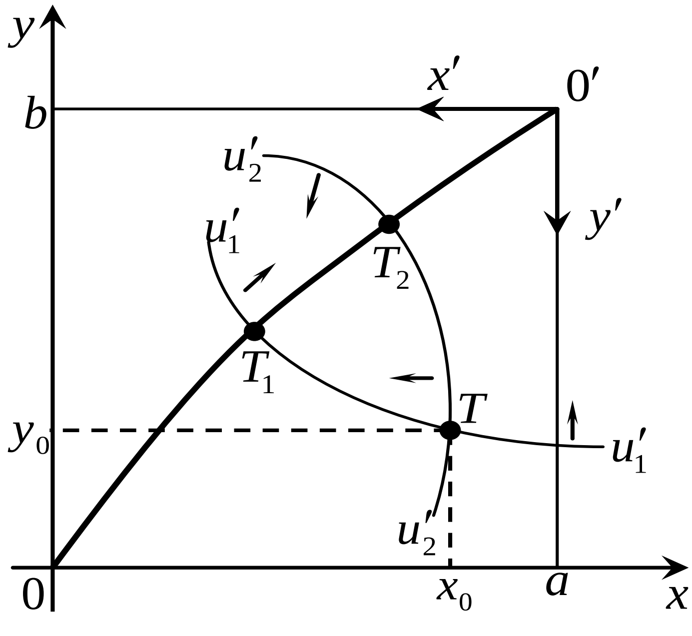
В пределе мы получим точку *A* на кривой безразличия $u_2'u_2'$, в которой эта кривая касается кривой безразличия первого участника. Рассуждая аналогично, можно улучшить положение второго участника, не ухудшая при этом положение первого. Лучшее решение будет находиться в точке *B*, где кривая $u_1'u_1'$ касается кривой u_2'. Таким образом, мы получим множество точек, в которых кривая безразличия первого участника касается кривой безразличия второго участника. Это множество точек лежит на кривой $00'$, которая называется ***контрактной кривой***.

Рассмотрим контрактную кривую с точки зрения эффективности по Парето. На рис. 1., при переходе от точки *M* к точке *A*, первый участник улучшает своё положение, а положение второго остаётся неизменным; при переходе от точки *M* к точке *B*, положение второго участника улучшается, а положение первого остаётся неизменным. Таким образом, получается, что положение *A* предпочтительнее положения *B*, а положение *B*, в свою очередь, предпочтительнее положения *M*.

При переходе от А к В полезность одного из участников увеличивается, а полезность другого уменьшается. Такие решения называются ***Парето-несопоставимыми***.

Множество решений, которые являются Парето-предпочтительными по сравнению с решениями, не входящими в данное множество, называют ***множеством Парето-эффективных решений***. Таким образом, контрактная кривая является множеством решений, эффективных по Парето.

Пример. Вернёмся к вопросу об улучшении условий каждого участника при обмене.



Очевидно, что первый участник согласится на обмен, при котором его кривая безразличия сдвинется вверх и вправо (Рис.), а второй участник, согласится на обмен, при котором его кривая безразличия сдвинется вниз и влево. Таким образом, множество эффективных обменов будет лежать на контрактной кривой между точками T_1 и T_2. Этот участок объединяет множество решений, которые могут принимать участники в ходе переговоров (торга). Именно поэтому, это множество называется ***переговорным***.

Найдём условие, которым удовлетворяют элементы переговорного множества. Условие Парето-эффективности означает, что игроки решают одну из двух задач. Либо первый игрок максимизирует свою полезность, $U_1(x, y) \to \max$ при условии, что полезность второго игрока сохраняет своё стационарное значение, т.е. $U_2(a-x, b-y) = C_1$ (задача 1), либо второй игрок максимизирует свою полезность $U_2(x, y) \to \max$ при условии, что $U_1(x, y) = C_2$.

Какая именно из двух задач будет решаться, зависит от того, кто из игроков обладает большей властью или, другими словами, имеет преимущество в переговорной силе. Если такое преимущество имеет первый игрок, то будет решаться задача 1, если таким преимуществом обладает второй игрок, то решаться будет соответственно задача 2. Очевидно, что

$$C_1 = U_2(a - x_0, b - y_0),$$

$$C_2 = U_1(x_0, y_0).$$

Решим задачу 1, т.е.

$$\begin{cases} U_1(x, y) \to \max, \\ U_2(a-x, b-y) = C_1, \\ C_1 = u_2. \end{cases}$$

Имеем задачу нахождения условного экстремума для функции $u_1(x, y)$. Для её решения используем функцию Лагранжа.

$$L = U_1(x, y) - \lambda(U_2(a - x; b - y) - C)$$

Найдём частные производные и приравняем их к нулю.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial U_1}{\partial x} - \lambda\left(\frac{\partial U_2}{\partial(a-x)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial U_1}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial U_2}{\partial(b-y)}\right) = 0\,.$$

Отсюда получаем условие первого порядка (необходимое условие экстремума, касающиеся первых производных)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial x} = -\lambda \dfrac{\partial U_2}{\partial(a-x)}, \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial y} = -\lambda \dfrac{\partial U_2}{\partial(b-y)}. \end{cases}$$

Исключая параметр $\lambda,$ получим уравнение:

$$\frac{\dfrac{\partial U_1}{\partial x}}{\dfrac{\partial U_1}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial U_2}{\partial(a-x)}}{\dfrac{\partial U_2}{\partial(b-y)}}$$

В уравнении **(3.7)** предельные полезности продуктов обмена для первого игрока

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_2}{\partial x} = MU_{1x}, \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial y} = MU_{1y}. \end{cases}$$

Предельная норма замещения продукта x продуктом y для первого игрока будет в этом случае равна:

$$MRS_1 = \frac{MU_{1x}}{MU_{1y}}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial(a-x)} = MU_{2x}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial(b-y)} = MU_{2y}$$

$$\frac{MU_{2x}}{MU_{2y}} = MRS_2 .$$

Таким образом, из условия первого порядка следует уравнение:

$$MRS_1(x, y) = MRS_2(a - x; b - y)$$

Следовательно, все точки на контрактной кривой удовлетворяют этому уравнению**.** К этому уравнению нужно добавить условия индивидуальной рациональности:

$$\begin{cases} U_1(x, y) \geq U_1(x_0, y_0), \\ U_2(a - x; b - y) \geq U_2(a - x_0; b - y_0). \end{cases}$$

Решение задачи максимизации полезности вторым игроком (задача 2) будет аналогичным.

Если оба продукта x и y являются нормальными товарами, то можно показать, что в некоторой точке переговорного множества будет выполняться и условие второго порядка. Следовательно, контрактная кривая описывается вышеприведенным уравнением. Переговорное множество удовлетворяет уравнению и системе неравенств **.**

Пример. Два туземных племени живут охотой и рыболовством. Для того, чтобы природные ресурсы не истощались, правительство установило общие квоты на отлов рыбы и отстрел дичи: рыбы – не более 100 тонн в год; дичи – не более 400 тонн в год.

Первоначально первое племя добывало 60 тонн рыбы и 20 тонн дичи, а второе племя добывало 40 тонн рыбы и 20 тонн дичи.

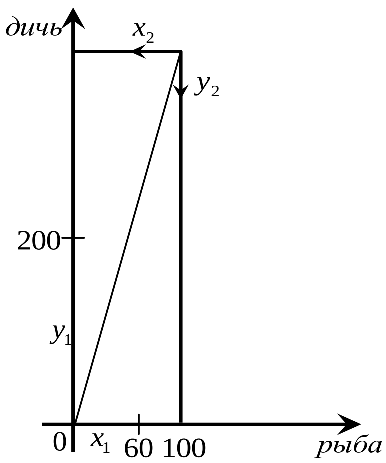
Предположим, что каждое из племён имеет собственную функцию полезности:

$U_1 = 2\sqrt{x_1 y_1}$, где x_1 – количество рыбы, а y_1 – количество дичи;

$U_2 = 3\sqrt{x_2 y_2}$, где x_2 – количество рыбы, а y_2 – количество дичи.

Вожди обоих племён собрались и решили заключить соглашение об охоте и рыболовстве, выполнение которого должно увеличить полезность каждого племени. Требуется найти множество контрактов, улучшающих положение каждого племени, т.е. необходимо найти контрактную кривую.

Решение. Изобразим ящик Эджворта (см. рис.)



$$\begin{cases} x_2 = 100 - x \\ y_2 = 400 - y \end{cases} \qquad \textbf{(*)}$$

Найдём уравнение контрактной кривой, для чего обратимся к функции **)**. Найдём предельные нормы замещения:

$$MU_{1x} = \frac{\partial U_1}{\partial x} = \left(2\sqrt{xy}\right)'_x = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$MU_{1y} = \frac{\partial U_1}{\partial y} = \left(2\sqrt{xy}\right)'_y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$MRS_1(x,\ y) = \frac{y}{x}$$

$$MRS_2(a - x;\ b - y) = \frac{b - y}{a - x} = \frac{400 - y}{100 - x}$$

Подставляя в уравнение (3.8), получим

(**)

$$\frac{y}{x} = \frac{400 - y}{100 - x}$$

$$\frac{100 - x}{x} = \frac{400 - y}{y}$$

$$\frac{100}{x} = \frac{400}{y}$$

$$100y = 400x \qquad (***)$$

$$y = 4x$$

Уравнение **(***)** - уравнение контрактной кривой.

Для того, чтобы на контрактной кривой определить переговорное множество, нужно найти полезности каждого племени в точке угрозы:

$$U_1 = (60;\ 200)$$

$$U_1 = 2\sqrt{60 \cdot 200} = 219,089$$

$$U_2 = (40;\ 200)$$

$$U_2 = 3\sqrt{40 \cdot 20} = 268,328$$

Найдём полезность каждого племени в точках на контрактной кривой:

$$U_1 = 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{x \cdot 4x} = 2\sqrt{4x^2} = 4x$$

$$U_2 = 3\sqrt{(100 - x)(400 - y)} = 3\sqrt{(100 - x)(400 - 4x)} = 600 - x\,.$$

Получаем условия индивидуальной рациональности.

$$\begin{cases} 4x \ge 219{,}089, \\ 600 - 6x \ge 268{,}328; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 54{,}772, \\ -6x \ge -331{,}328; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 54{,}772, \\ x \le 55{,}279 \end{cases}$$

$$57{,}772 \le x \le 55{,}279$$

$$231{,}008 \le x \le 221{,}116$$

4.4. Арбитражное решение

Рассмотрим ящик Эджворта и построим в нём переговорное множество (рис.).

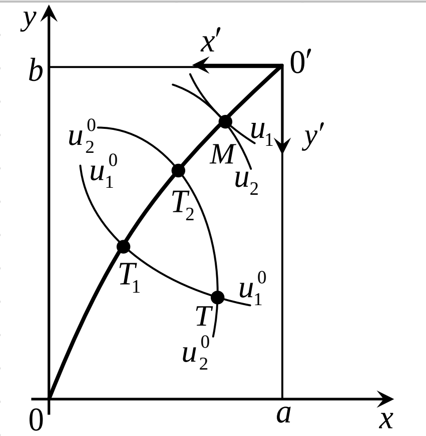


Рис. 3.4.

Построим контрактную кривую $(00')$. Точка T, находящаяся на пересечении двух кривых u_1^0 и u_2^0, является точкой угрозы.

Отрезок на кривой контрактов между точками T_1 и T_2 представляет собой переговорное множество.

Каждой точке $M(x, y)$ на кривой контрактов соответствует определённые значения полезностей каждого из участников $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Таким образом, каждой точке на кривой контрактов соответствует пара чисел u_1 и u_2. Всей кривой контрактов соответствует геометрическое множество точек на координатной плоскости $u_1 u_2$ (см. рис. 1.).

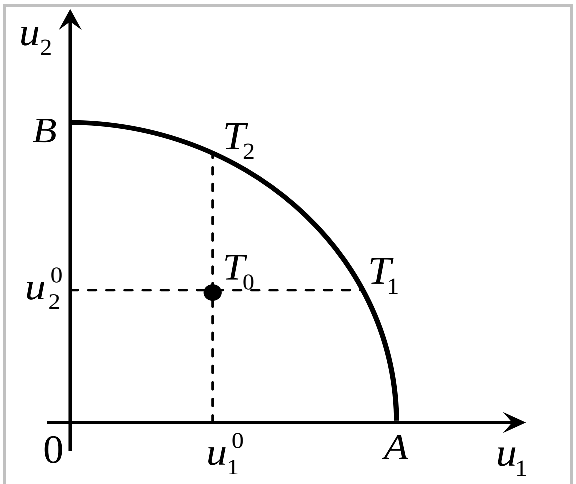


Рисунок 1

На рис.1. в точке 0 $u_1 = 0,$ а $u_2 = b.$ На рис. 1 этой точке соответствует точка с координатами $(0, B)$. В точке $0'$ $u_2 = 0,$ а $u_1 = a.$ На рис.1 ей соответствует точка с координатами $(A, 0)$.

Двигаясь из точки $(0, B)$ в точку $(A, 0)$, мы будем увеличивать полезность первого игрока и уменьшать полезность второго. Получим кривую *AB*.

Она называется кривой ***Парето-эффективных решений*** для данной игры (иногда эту кривую называют множеством Парето-оптимальных решений). Изобразим на рис. 5. точку T0 $\left(u_1^0, u_2^0\right)$, где u_1^0 и u_2^0 – полезности участников в точке угрозы. Условием заключения контракта будут условия индивидуальной рациональности $\begin{cases} u_1 \ge u_1^0, \\ u_2 \ge u_2^0 \end{cases}$. На рис.5 этим условиям будет соответствовать дуга T_1T_2.

Дуга T_1T_2 представляет собой переговорное множество, которое, в свою очередь, является *подмножеством множества Парето-эффективных решений*, для которого выполняются условия индивидуальной рациональности.

Любая точка на кривой T_1T_2 для каждого из участников лучше, чем точка *T0*. Переход из любой точки кривой T_1T_2 в другую точку этой кривой улучшает положение одного из участников, ухудшая при этом положение другого. Возникает вопрос о существовании какого-либо оптимального компромиссного решение?

Д. Нэш доказал, что существует (при том единственное) решение задачи с торгом, удовлетворяющее следующим критериям:

1.Решение является эффективным (оптимальным) по Парето.

2.Полезность каждого участника при этом решении не меньше, чем в точке угрозы.

3.Решение не изменится, если сумма общего выигрыша будет преобразована по линейному закону $ku+c,$где $u-$ первоначальная сумма общего выигрыша; c и $k-$ $const.$ Это свойство называется ***инвариантностью относительно линейного преобразования***.

4.Решение не изменится, если перенумеровать участников игры (свойство симметрии).

5.Независимость от альтернатив, не имеющих отношения к делу. Это значит, что все возможные альтернативы, которые рациональные игроки не будут использовать, можно исключить из рассмотрения.

Нэш доказал, что решением, которое удовлетворяет всем вышеперечисленным критериям, является решение, для которого функция $\prod_{i=1}^{n}\left(u_i-u_i^0\right)$ достигает своего максимума на множестве точек переговорного множества[1]. Решение справедливо для любого конечного числа игроков. Если имеются два игрока, то решение Нэша принимает вид:

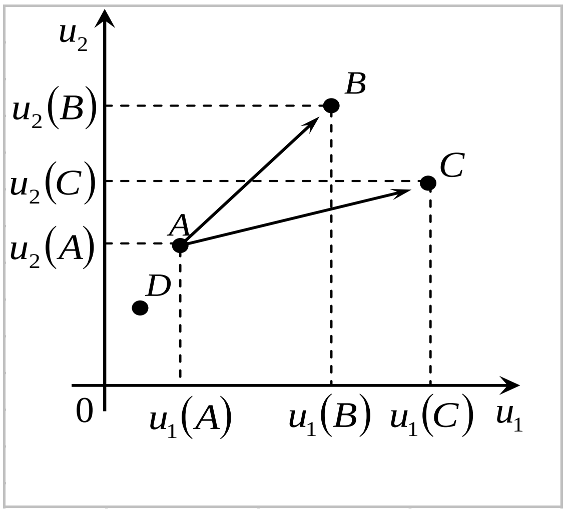
$$\max\prod_{i=1}^{n}\left(u_1-u_1^0\right)\left(u_2-u_2^0\right),$$

при условии, что $\left(u_1,u_2\right)\in T_1T_2$.

В чём смысл каждого из пяти критериев решение Нэша?

Первый. Рассмотрим игру с двумя участниками, полезности которых равны u_1 и u_2 соответственно (см. рис.)

[1] $\prod_{i=1}^{n}\left(u_i-u_i^0\right)$, где n – количество участников игры, u_i – полезность i-го игрока, u_i^0 – полезность i-го игрока в точке угрозы.



При переходе от A к B полезности обоих участников возрастают. Таким образом, B – Парето-эффективнее, чем A, и C – Парето-эффективнее, чем A. Сравнивая B и C, мы находим, что C – выгоднее, чем B для первого участника, но не выгодно для второго. Это обстоятельство говорит о том, что решения B и C являются *несопоставимыми по Парето*.

Если альтернативными для участников являются решения A, B и C, то рациональные участники отбросят решение A как Парето-неэффективное и оставят B и C. Очевидно, что оптимальным решением будет либо решение C, либо решение B.

Этот критерий означает, что игроки рассматривают только эффективные по Парето решения.

Второй. Этот критерий соответствует условиям индивидуальной рациональности.

Третий. Предположим, что общую сумму выигрышей двух участников увеличили вдвое. Очевидно, что вдвое увеличится полезность каждого из участников. Требуется ли при этом искать новые решения для этой комбинации? Если пользоваться решением Нэша, то этого делать не нужно. В частности, третий критерий означает, что переход от одной единицы измерения к другой не изменяет решения Нэша. Такие решения

Нэша не изменятся, если каждой полезности добавить некоторую константу.

Четвёртый. Решение, найденное для одной нумерации, не изменится при другой нумерации.

Пятый. Если для случая, описанного на рис. 6, ввести четвёртую альтернативу D, то решение не изменится, потому что альтернатива D не будет рассматриваться отдельными игроками.

Решение Нэша называют также ***арбитражным решением***. Это объясняется тем, что, если бы участники игры обратились к независимому арбитру для решения их торгового спора (т.е. для выбоора точки в переговорном множестве), то решение арбитра совпало бы с решением Нэша.

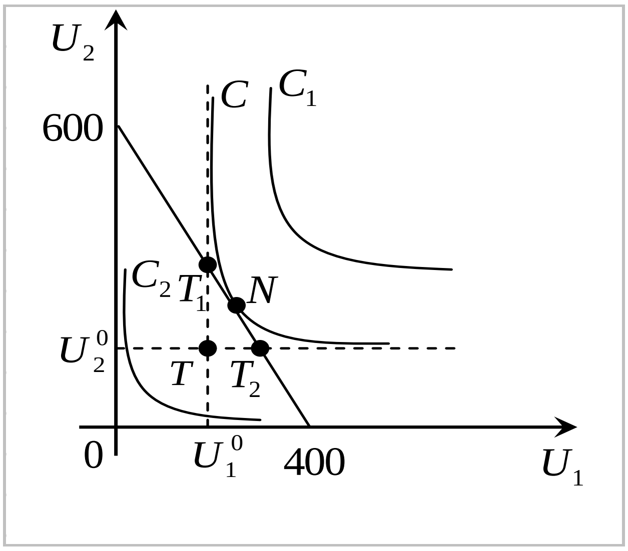
Пример. Пусть вожди племён (см. выше рассмотренный пример) обратились к старейшине (арбитру) для решения их спора. Требуется найти решение, которое примет старейшина.

Решение. Найдём на плоскости u_1u_2 множество Парето-оптимальных решений (см. рис.). Для этого найдём функциональную зависимость между полезностями племён U_1 и U_2. Ранее было получено, что на контрактной кривой имеет место система уравнений

$$\begin{cases} U_1 = 4x, \\ U_2 = 6(100 - x) \end{cases}$$

$$x = \frac{U_1}{4}$$

$$U_2 = 600 - \frac{3}{2}U_1$$



Арбитражное решение – это такое решение, при котором достигает своего максимума произведение

$$\max\left(U_1 - U_1^0\right)\left(U_2 - U_2^0\right),$$

где $U_1, U_2 \in T_1, T_2$.

Рассматривая кривую, на которой

$$\left(U_1 - U_1^0\right)\left(U_2 - U_2^0\right) = C,$$

где $C > 0,$ получаем, что $xy = C$ – уравнение гиперболы.

Максимизируя произведение, будем смещать гиперболу вверх и вправо до тех пор, пока она не окажется не границе допустимой области. В этом положении гипербола будет касаться кривой T_1T_2.

Уравнение равносильно задаче об отыскании условного экстремума

$$\begin{cases} \left(U_1 - U_1^0\right)\left(U_2 - U_2^0\right) \to \max, \\ U_2 = 600 - \dfrac{3}{2}U_2, \\ U_2 \geq U_2^0, \\ U_1 \geq U_1^0. \end{cases}$$

Решим эту задачу с помощью функции Лагранжа:

$$2U_2 + 3U_1 - 600 = 0$$

$$L = (U_1 - U_1^0)(U_2 - U_2^0) - \lambda(2U_2 + 3U_1 - 600)$$

$$\frac{\partial L}{\partial U_1} = (U_2 - U_2^0) - 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial U_2} = (U_1 - U_1^0) - 2\lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{U_2 - U_2^0}{3}$$

$$\lambda = \frac{U_1 - U_1^0}{2}$$

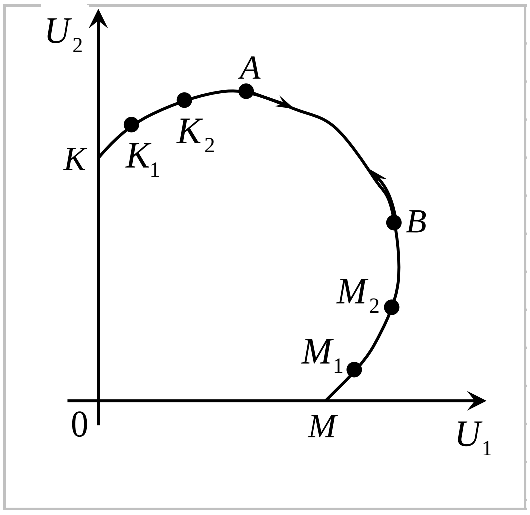
$$\begin{cases} \dfrac{U_2 - U_2^0}{3} = \dfrac{U_1 - U_1^0}{2}, \\ 2U_2 + 3U_1 = 600 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим решение (единственное). Очевидно, что найденное решение U_1 и U_2 будет координатами точки касания гиперболы и торгового множества.

Множество решений $\{P\}$ кооперативной игры называется множеством Парето-оптимальных решений, если:

1. Для всех решений $x \in \{P\}$ найдётся такое решение $y \notin \{P\}$, что для первого участника решение x будет лучше чем y и не хуже чем y для всех остальных участников.
2. Для всех двух решений $x, z \in \{P\}$ переход от x к z улучшает положение хотя бы одного участника и ухудшает положение хотя бы одного другого. Т.е. x и z являются решениями *несравнимыми по Парето*.

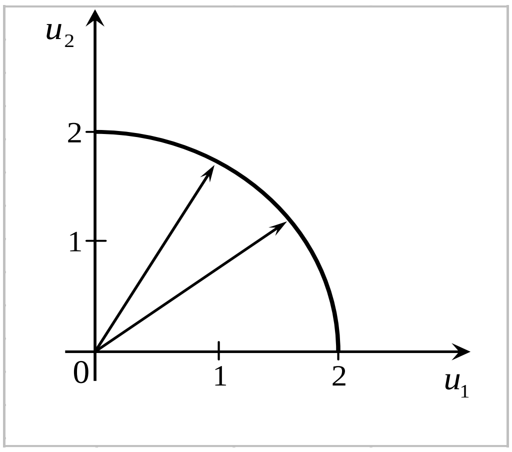
На рис. изображена область Парето-эффективных решений.



Все ли решения на кривой *KM* являются Парето-оптимальными? Так как $K_1 > K,$ а $K_2 > K_1,$ то получается, что область AB – область Парето-оптимальных решений. Дуга Парето-оптимальных решений всегда имеет отрицательный наклон. Вопрос о её выпуклости и вогнутости не имеет однозначного ответа.

Пример. Если два участника игры решают заключить контракт, т.е. решают предпринимать кооперативные действия, то их обмены будут располагаться на контрактной кривой. Пусть на контрактной кривой полезности участников связаны уравнением $u_1 + u_2^2 = 4$.

Решение. Найдём на плоскости $u_1 u_2$ множество Парето-оптимальных решений (см. рис.).



Пусть при прежних условиях

$$\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} = 1$$

$$\sqrt{u_2} = 1 - \sqrt{u_1}$$

$$u_2 = 1 - 2\sqrt{u_1} + u_1 .$$

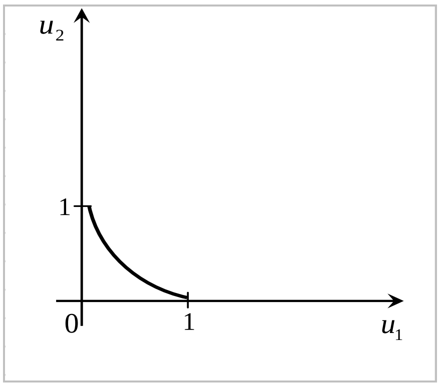
На рис.10 изобразим множество Парето-эффективых решений.

$$\frac{\partial u_2}{\partial u_1} = -\frac{1}{\sqrt{u_1}} + 1 < 0$$

$$0 \le u_1 \le 1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u_1^2} = \frac{1}{2u_1^{\frac{3}{2}}} > 0 ,$$

т.е. кривая имеет отрицательный наклон и является вогнутой.



Для случая, когда в обмене участвуют товары, на которые распространяется закон Госсена (убывание предельной нормы замещения), характерна выпуклая форма Парето-оптимального множества. Эта форма используется в большинстве задач.

4.5. Игры с нулевой суммой и условия Каруша-Куна-Таккера

Рассмотрим задачу поиска равновесных смешанных стратегий на примере антагонистических игр.

Пусть есть два игрока, A и B, которые многократно разыгрывают некоторую игру. Каждый игрок в каждом розыгрыше придерживается одной из нескольких стратегий - для простоты будем считать, что количество стратегий для обоих игроков совпадает и равняется n. При выборе i-й стратегии первым игроком и j-й стратегии вторым игроком первый игрок получит выигрыш aij, а второй игрок получит такой же проигрыш - так уж устроены антагонистичные игры. Эти выигрыши можно записать в виде квадратной матрицы A:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|, 1 \leq i, j \leq n$$

Игроки разыгрывают игру многократно и могут использовать разные стратегии в разных розыгрышах.

Смешанная стратегия - это вектор вероятностей, сопоставленных каждой из *чистых* стратегий игрока. Каждый игрок выбирает одну из стратегий в очередном розыгрыше в соответствии с вероятностью, определённой для неё его смешанной стратегией. Если обозначить через p и q смешанные стратегии игроков, то математическое ожидание выигрыша первого игрока будет равняться

$$f(p,q) = (Ap,q) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij}$$

Пара смешанных стратегий называется *равновесием*, если ни один игрок не может увеличить свой выигрыш, изменив свою стратегию. Другими словами, для любой другой пары стратегий p′, q′ выполнено:

$$(Ap', q) \leq (Ap, q) \leq (Ap, q')$$

Поиском таких равновесий сейчас и займёмся.

1. Равновесия

Итак, пара смешанных стратегий образует равновесие, если изменение смешанной стратегии для первого игрока не может увеличить его выигрыш, а изменение смешанной стратегии для второго игрока не может уменьшить его проигрыш.

Например, рассмотрим такую матрицу выигрышей:

A=2 3

4 1

В этом случае ни одна из пар чистых стратегий не является равновесием. Пусть, скажем, первый игрок выбирает первую стратегию. Тогда второй игрок хочет захочет также всегда выбирать первую стратегию: это приведёт к меньшему проигрышу (2 против 3). Но, если второй игрок выбирает первую стратегию, первый игрок предпочтёт ответить стратегией номер два: так его выигрыш будет больше (4 против 1). Однако, если первый игрок выбирает вторую стратегию, второй игрок также ответит второй: его проигрыш таким образом уменьшится (1 против 4). Но при выборе вторым игроком второй стратегии первый игрок выберет первую стратегию, и так далее. Итого, при любом выборе чистых стратегий хотя бы один из игроков может изменить свой выбор так, чтобы увеличить собственную выгоду.

Однако в пространстве смешанных стратегий равновесие найдётся. Нетрудно проверить, что равновесием в данном случае будет пара смешанных стратегий (1/2,1/2), (1/2,1/2). В таком случае математическое ожидание выигрыша для первого игрока будет равно 2.5.

Нетривиальным является тот факт, что пара стратегий, образующая равновесие, обязательно существует. Это утверждает знаменитая *теорема Нэша*, будучи применённой к антагонистическим играм.

Если смешанные стратегии p и q образуют равновесие, они оказываются решениями оптимизационных задач:

$$p = \arg\max_{p'}(Ap', q), q = \arg\max_{q'}(Ap, q')$$

При этом на сами стратегии распространяются очевидные ограничения:

$$p_i \geq 0, q_j \geq 0, 1 \leq i, j \leq n$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

Если бы в задаче были только ограничения в форме равенств, для поиска решений можно было бы воспользоваться методом множителей Лагранжа. Но его применение невозможно из-за наличия ограничений в виде неравенств: каждый компонент смешанной стратегии должен допускать вероятностную интерпретацию, а поэтому не может быть отрицательным.

Рассмотрим, например, следующую матрицу выигрышей:

A=3 1 2

−2 3 1

−2−2 3

Не вдаваясь в технические детали, скажу, что применение метода множителей Лагранжа с учётом только лишь ограничений в виде равенств

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

в данном случае приведёт к решению p=(0.74, 0,29,−0.03)

Это происходит из-за того, что метод множителей Лагранжа не может учесть ограничения в виде неравенств. Тут-то нам и помогут условия Каруша-Куна-Таккера.

2. Условия Каруша-Куна-Таккера

Также эти условия известны как условия Куна-Таккера, а всё потому, что впервые опубликованы они были в работе 1951-го года за авторством

Куна и Таккера, и лишь впоследствии обнаружилось, что Каруш уже в 1939-м году сформулировал их в неопубликованной работе.

На время отвлечёмся от теории игр и сформулируем более общую задачу оптимизации следующим образом: необходимо найти минимум некоторой функции

$\min_{x \in R} f(x)$

при условии ограничений как в виде равенств, так и в виде неравенств:

$h_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq m$

$l_j(x)=0, 1 \leq j \leq r$

Доказывается, что тогда каждая точка, являющаяся решением оптимизационной задачи, удовлетворяет условиям Каруша-Куна-Таккера:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) - \sum_{j=1}^{r} \mu_j l_j(x\ )) = 0$$

$$\lambda_i * h_i(x) = 0.1 \leq i \leq m$$

$$\lambda_i \ \leq 0.1 \leq i \leq m$$

$$h_i(x) = 0.1 \leq i \leq m$$

$$l_j(x) = 0.1 \leq j \leq r$$

Здесь первое условие очень похоже на соответствующие условие в методе множителей Лагранжа; последние два условия фактически дублируют ограничения исходной оптимизационной задачи.

Второе и третье условия - особенные. Вместе с условием четыре они означают следующее:

- либо $h_i(x)=0$,
- либо всё-таки $h_i(x)<0$, но тогда обязательно $\lambda_i=0$.

Теперь возникает вопрос о том, а как, собственно, решать такую систему уравнений. Как правило, можно поступать следующим образом:

- из условия 2 означить некоторые из λ_i нулями;
- из оставшихся уравнений условия 2, уравнения 1 и условий 5 получить систему уравнений и найти все её решения;
- из этих решений выбрать те, что удовлетворяют условиям 3 и 4;
- повторить описанный алгоритм для всех возможных способов означить переменные из условия 2 нулями;
- из всего множества полученных решений простым перебором выбрать те, что являются решениями исходной оптимизационной задачи.

Что же, звучит довольно сложно. Попробуем теперь приземлить этот алгоритм на задачу поиска равновесных стратегий в антагонистических играх.

3. Условия Каруша-Куна-Таккера для антагонистических игр

Выше записаны условия Каруша-Куна-Таккера для задачи минимизации. Поэтому нужно сформулировать все условия в терминах задачи минимизации, плюс нужно соблюсти формальность и переписать условия в виде неравенств так, чтобы они были записаны в виде «меньше либо равно нулю».

Условия для p:

$$-(Ap,q)\to\min$$

$$-p_i\le 0, 1\le i\le n$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_i - 1 = 0$$

Условия для q:

$$(Ap,q)\to\min$$

$$-q_j\le 0, 1\le j\le n$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_i - 1 = 0$$

Теперь выпишем лагранжианы:

$$L_1(p) = -(Ap, q) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i - \beta(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1)$$

$$L_2(q) = -(Ap, q) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j q_j - \mu(\sum_{j=1}^{n} q_j - 1)$$

Возьмём производные:

$$\frac{\partial L_1(p)}{p_i} = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + \alpha_i - \beta$$

$$\frac{\partial L_2(q)}{q_j} = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i + \lambda_j - \mu$$

Теперь запишем оставшиеся условия Каруша-Куна-Таккера, местами преобразовав в более удобный вид.

ГЛАВА 5. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА СТАТИЧЕСКИХ ИГРАХ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

5.1. Конкуренция по Бертрану. Повторяющиеся игры.

Пусть одни и те же условия игры с теми же игроками воспроизводятся многократно. В таком случае мы имеем *расширение игры*, которое называют *повторяющейся игрой*. Нетрудно заметить, что в повторяющейся игре смешанные стратегии могут применяться как частоты использования чистых стратегий. Возможность использования смешанных стратегий не является единственным преимуществом повторяющейся игры.

При повторении одной и той же игровой ситуации (при многократном разыгрывании игры) изменяются мотивы рационального поведения участников игры: во-первых, каждый из участников получает представление о предпочтениях другого участника; во-вторых, каждый участник, выбирая свою стратегию на некотором n-м шаге, даёт ответ на выбор другого участника на $(n+1)$ шаге. В игре возникают коммуникации между участниками. Подавая сигнал в виде выбранной на очередном шаге стратегии, этого, участник может влиять на выбор стратегии партнером на следующем шаге. Таким образом, в повторяющейся игре возникают предпосылки к совместному выбору стратегий, т.е. *кооперации*. Однако, существование этих предпосылок совсем не гарантирует того, что участники игры смогут кооперироваться.

Эти обстоятельства имеют большое значение при анализе рынков с олигополистической конкуренцией (дуополия). Рассмотрим пример.

Дуополия по Бертрану имеет следующие особенности.

1. Парадокс Бертрана. Рассмотрим теперь ситуацию, когда две фирмы (как в дуополии по Курно) производят однородный продукт, но теперь мы предположим, что фирмы одновременно и независимо объявляют цену, по которой они готовы продавать свою продукцию. Тогда спрос, с которым сталкивается каждая фирма, определяется следующим образом:

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} D(p_i), & \text{если} \quad p_i < p_j, \\ D(p_i)/2, & \text{если} \quad p_i = p_j, \\ 0, & \text{если} \quad p_i > p_j. \end{cases}$$

Иными словами, фирма, назначившая меньшую цену "получает" весь спрос, а если цены одинаковы, то потребители покупают продукцию фирм равновероятно.

Предположим, что цены (p^*_1, p^*_2) образуют равновесие по Нэшу. Во-первых, очевидно, что $p^*_i \geq c$, так как назначение цены ниже предельных затрат приведет к отрицательной прибыли, чего не может быть в равновесии, т.к. цена, равная предельным затратам, обеспечивает нулевую прибыль. Далее, ни одна из цен p^*_i не может быть выше c. Действительно, предположим для определенности, что $p^*_1 > c$, тогда если $p^*_2 \geq p^*_1$, то фирма 2, сталкивающаяся в этом варианте в лучшем случае с половинным спросом, может "перехватить" весь спрос, назначив цену $p'_2 = p^*_1 - \varepsilon$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и тем самым улучшив свое положение. Если же $p^*_1 > p^*_2 > c$, то фирма 1, аналогично, может назначить цену $p^*_2 - \varepsilon$, "перехватывая" весь спрос.

Таким образом, в равновесии по Бертрану (или в равновесии по Нэшу в дуополии по Бертрану $p^*_1 = p^*_2 = c$, и фирмы получают нулевую прибыль. Это и есть пар доке Бертрана.

Как можно избежать этой парадоксальной ситуации? Во-первых, можно ввести условие ограничения мощности фирм, то есть считать, что есть цены, при которых фирмы не могут обеспечить весь спрос. Во-вторых, можно снять условие однократности этой игры, и это, как мы увидим позднее в гл. 2, существенно меняет ситуацию. Наконец, можно избавиться от предположения об однородности продукции.

2. Рассмотрим ситуацию с дифференцируемыми продуктами. Фирмы 1 и 2 выбирают цены p_1 и p_2 одновременно и независимо. Спрос, с которым сталкивается фирма i, $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + b \cdot p_j$, где $b > 0$ — отражает степень заменяемости i-ого продукта j-ым. (Мы не обсуждаем здесь реалистичность такой функции спроса). Предельные затраты есть c, $c < a$. Пространство стратегий — это $S_i = [0, \infty)$ — фирмы выбирают цены. Тогда прибыль i-ой фирмы определяется равенством

$$\pi_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j)[p_i - c] = [a - p_i + bp_j][p_i - c].$$

Пара (p^*_1, p^*_2) образует р.Н., если для $\forall$ i p^*_i решает задачу

$$\max_{0 \le p_i < \infty} \pi_i(p_i, p_j^*) = \max[a - p_i + bp_j^*][p_i - c].$$

Решение задачи для i-ой фирмы есть

$$p_i^* = \frac{1}{2}(a + bp_j^* + c),$$

то есть

$$p_1^* = \frac{1}{2}(a + bp_2^* + c)$$

$$p_2^* = \frac{1}{2}(a + bp_1^* + c).$$

Следовательно, $p^*_1 = p^*_2 = (a + c)/(2 - b)$

Первым, кто попытался систематизировано применить этот подход, был профессор Университета Калифорнии Джо Бейн. В 1951 году Бейн опубликовал результаты исследования 42 отдельных отраслей за 1936 - 1940 годы. согласно данным анализа Бейна, отрасли, имеющие степень концентрации выше 70, получили больше прибыли, чем менее концентрированные отрасли. Связь между доходами и концентрацией не была ни совершенной, ни сильной, но она существовала. В течение 50 - 60-х годов студенты и последователи Бейна распространили его исследования на другие отрасли и годы. Многие из них получили такие же результаты.

Установлено наличие слабой, но устойчивой связи между доходами и концентрацией. Экономисты пришли к выводу, что в целом, чем выше уровень концентрации отрасли, тем ближе взаимодействие фирм в ней к картелю или монополии. Это будет верно даже в том случае, если между конкурентами не будет соглашения о повышении цен и дележе рынка.

В современной экономике можно наблюдать процесс, где первоначально господствовали мелкие предприятия, а теперь быстро идет процесс концентрации производства.

Ситуация эта весьма типична для нашей страны: такой путь прошли большинство отраслей нового частного бизнес, где тон задают не приватизированные, а вновь созданные - и потому первоначально являвшиеся мелкими – компаниями. Сошлемся для примера на низкий уровень цен в бурно олигополизирующейся пивной промышленности.

Пример. *«Назначение цены»*. Две фирмы, выпускающие однотипный продукт, конкурируют друг с другом, устанавливая различные цены на свою продукцию. Выпуски фирм считаем заданными и неизменными. Такая конкуренция двух дуополистов называется ценовой конкуренцией или *конкуренцию по Бертрану*.

Для простоты будем считать, что каждая фирма выбирает одну из двух стратегий: низкая цена, высокая цена. Будем также считать, что фирмы назначают цену в начале каждого месяца независимо друг от друга. Так как продукт фирм однотипен, то потребитель будет осуществлять выбор, исходя только из цены. Та фирма, которая назначит более высокую цену, понесет убытки. С другой стороны, более высокая цена даст большую прибыль при условии, что на продукцию фирмы будет спрос. Прибыли фирм для каждого из возможных исходов приведем в следующей таблице.

		фирма 1	
		низкая цена	высокая цена
фирма 2	низкая цена	10; 10	100; -50
	высокая цена	-50; 100	50; 50

Решение. Выпишем матрицу игры и найдём равновесие по Нэшу.

$$\begin{pmatrix} \underset{N}{(10;10)} & (100;-50) \\ (-50;100) & (50;50) \end{pmatrix}$$

Равновесным по Нэшу исходом будет (10;10), а равновесными стратегиями – назначение низкой цены. Таким образом, дуополия Бертрана дает тот же эффект, что и совершенная конкуренция – снижение цены до уровня предельных издержек. Что мешает фирмам принять наиболее эффективную для них стратегию высоких цен с выигрышами?

Исход (50;50) не является равновесным по Нэшу, поэтому, даже если фирмы договорятся об установлении высокой цены, каждой фирме в отдельности будет выгодно снижать цену. Ценовый сговор запрещён антимонопольным законодательством, но дуополия Бертрана показывает, что препятствием для сговора служит конкуренция. «Сговор разрушается зубилом конкуренции».

Известны, однако, практические примеры, что олигополии воздерживаются от снижения цены в течение длительного времени. Следовательно, у фирм в условиях олигополии есть возможность координации действий. Как осуществляется эта координация, и может ли возникать исход, равновесный по Нэшу и эффективный по Парето?

Применительно к примеру *«Назначение цены»* стратегия *«Зуб за зуб»* имеет следующий смысл. Если игра *«Назначение цены»* разыгрывается бесконечное число раз, то один из предпринимателей начинает с высокой цены и удерживает её до тех пор, пока второй предприниматель тоже придерживается высокой цены. Если второй назначит низкую цену, то первый тоже понизит свою цену. На практике существует возможность, что если второй предприниматель осознает свою ошибку и вернётся к высокой цене, то первый поступит также.

Стратегия *«Зуб за зуб»* позволяет достигать эффективного по Парето исхода, если игра повторяется бесконечное число раз. В реальности ни один процесс в экономике не длится бесконечно долго, поэтому предположение о бесконечном числе разыгрывания не реалистично.

Предположим, что игра *«Назначение цены»* разыгрывается конечное число раз, например, 5 лет (60 месяцев). Как изменится рациональные соображения участников при конечном числе разыгрывания? Каждый участник игры выбирает стратегию *«Зуб за зуб»*, потому что, отклонившись от неё в n-м периоде, он будет наказан в $(n+1)$ периоде. Однако в данном случае 60-й период является последним. Воспроизведём логику рассуждений первого участника игры: «Если я буду сохранять высокую цену 59 периодов, а в 60-м назначу низкую цену, то я получу дополнительный выигрыш, а другие участники не успеют меня наказать за отклонение от общей стратегии». Далее первый участник может предполагать, что другие игроки рассуждают аналогично, следовательно, есть смысл первому нарушить негласный договор. Тогда первый участник склонен отклониться от общей стратегии уже в 59-м, а не в 60-м периоде, и т.д. Таким образом, стратегия *«Зуб за зуб»* теряет устойчивость на протяжении всего разыгрывания.

Существуют, однако, предпосылки для того, чтобы стратегия *«Зуб за зуб»* применялась на олигополистическом рынке. Предположим, что фирма 1 имеет хотя бы небольшие сомнения в том, что ее конкурент абсолютно рационален, т.е. в том, что он просчитал всю логическую цепочку. Тогда фирма 1 будет сомневаться, в том, что конкурент назначит низкую цену в последнем периоде, тогда фирме 1 нет смысла отказываться от высокой цены в предпоследнем периоде и т.д. Имеются практические примеры, как устойчивости, так и неустойчивости стратегии *«Зуб за зуб»*.

Пример относительной устойчивости: *«Рынок водомерных счётчиков»*[2]

Производителями на рынке водомеров в США на протяжении более чем 30 лет были 4 фирмы, одна из которых имела долю на рынке примерно в 35%, остальные три вместе – от 50 до 55%. Особенность рынка водомеров в том, что спрос (его представляли коммунальные службы муниципалитетов) был неэластичен и стабилен. Так же стабильными были издержки производителей. Продукция однотипная, так

[2] См. Пиндайк Роберт С., Рубинфельд Дэниел Л. Микроэкономика: Пер. с англ. – М.: Дело, 2010, С. 544-545.

что рынок водомеров можно рассматривать как пример однородной олигополии. При таких условиях четыре фирмы могли бы получать высокую монопольную прибыль. Общая ценовая стратегия фирм – назначение высокой цены – наблюдалась в течение шести лет. Прямой сговор не мог реализоваться в силу действия антимонопольного закона, но фирмы могли довольно долго следовать стратегии *«Зуб за зуб»*.

Пример неудачи при выработке общей ценовой стратегии: *«Рынок авиаперевозок»*[3].

В 1983 году президент компании «American Airlines» предложил другим авиакомпаниям использовать единую схему образования тарифов в зависимости только от расстояния между аэропортами. Цель состояла в ограничении ценовой конкуренции и достижении неявного сговора в ценообразовании. Большая часть авиакомпаний отнеслась доброжелательно к предложенному плану. Однако, в итоге план был сорван, т.к. компания «Pan Am», недовольная своей долей рынка начала снижать цены, вводя различные скидки, и вскоре ей последовали другие компании. Разыгралась «Дилемма заключенных, или, как выразился один из экономистов, сговор был нарушен зубилом конкуренции.

При ограниченном количестве розыгрышей стратегия «*Зуб за зуб*» теряет устойчивость. Всё же в отдельных случаях она может оказаться эффективной. Предпосылки стратегии «Зуб за зуб»:

1. Малое число компаний и удовлетворённость каждой из них совей долей рынка;

2. Стабильный спрос и издержки;

3. Участники игры сомневаются в том, их конкуренты способны всё рационально подсчитать. Например, первый участник, сомневаясь в том,

---

[3] Там же, С. 545-546

что второй участник абсолютно рационален, думает: «Может быть, он не сообразит снижать цену в 60-м периоде, тогда мне выгоднее придерживаться стратегии *«Зуб за зуб»* на протяжении 59 периодов».

5.2. Дуополия Курно. Последовательные игры

До сих пор мы предполагали, что участники игры делают свои ходы одновременно, т.е. одновременно выбирают свои стратегии. Однако, во многих случаях, дело обстоит так, что игроки делают ходы поочерёдно. Такие игры **называются *последовательными играми***. Для их описания больше всего подходит развёрнутая форма игры, т.е. ее представление в виде дерева игры.

Рассмотрим в качестве примера последовательную игру двух участников. Пусть первый ход принадлежит первому игроку, который имеет две стратегии; второй участник ходит вторым и имеет три стратегии. Дерево этой игры изображено на рис. 1:

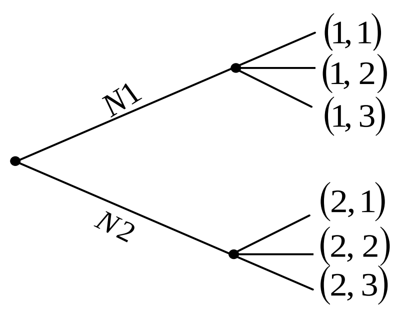


Рисунок 1

В данной игре первый игрок может оптимизировать свой выигрыш, проводя следующие вычисления. Сравниваются три исхода (1,1), (1,2) и (1,3). Пусть наибольшее значение выигрыша второго игрока достигается при исходе (1,2). Аналогично сравниваются три исхода (2,1), (2,2) и (2,3).

Пусть наибольшее значение выигрыша второго игрока достигается при исходе (2,3). Тогда второй игрок, действуя рационально, в ответ на первую стратегию первого игрока выберет стратегию, при которой реализуется исход (1,2) а в ответ на вторую стратегию первого игрока выберет стратегию, при которой реализуется исход (2,3).

Таким образом, первый игрок приходит к выводу, что если он выберет первую стратеги, то его выигрыш составит a_{11}, а если он выберет вторую стратегию, то выигрыш будет равен a_{23}. Если $a_{11} > a_{23}$, то первому игроку выгоднее придерживаться первой стратегии, а если $a_{23} > a_{11}$, то первому игроку выгоднее придерживаться второй стратегии.

Данный тип оптимальности называется ***оптимальностью по Штакельбергу***.

Исход игры (p, q) называется равновесием по Штакельбергу, а стратегии p и q первого и второго игроков соответственно называются оптимальными по Штакельбергу, если $a_{pq} = \max_{i \in S_1} a_{iq}$, где q определяется из уравнения $b_{iq} = \max_{j \in S_2} b_{ij}$

Пояснение. Уравнение $b_{iq} = \max_{j \in S_2} b_{ij}$ означает, что стратегия q является лучшим ответом второго участника на стратегию i первого участника, т.е.

$q = q(i)$.

Уравнение $a_{pq} = \max_{i \in S_1} a_{iq}$ означает, что первый участник выбирает стратегию таким образом, что в случае рационального выбора второго участника, первый участник получит свой наибольший выигрыш. Здесь мы предполагаем, что право первого хода принадлежит первому участнику. Аналогично можно сформулировать определение оптимальной стратегии по Штакельбергу в случае, если первый ход принадлежит второму участнику. В некоторых играх право первого хода даёт преимущество тому участнику, который им обладает.

Пример. «Игра на опережение».

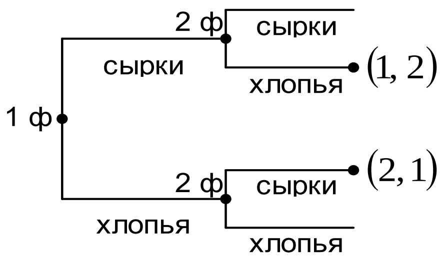
Ситуация дуополии на рынке фирм-производителей сухих завтраков. Обе фирмы выпускают одинаковую продукцию: сырки и хлопья. Первая фирма доминирует на рынке и первой приступает к выпуску продукта. Прибыли обеих фирм приведены в следующей таблице:

		Вторая фирма	
		сырки	хлопья
первая фирма	сырки	5; 5	10; 30 N_2
	хлопья	30; 10 N_1	5; 5

Найти равновесие по Штакельбергу.

Решение. В игре существует два равновесия по Нэшу (N_1, N_2). Если бы фирмы выбирали продукты одновременно, то равновесием в игре было бы равновесие по Нэшу. Вспомним, что первая фирма обладает правом первого хода и запишем развёрнутую форму игры (рис. 2)

Рисунок 2



Двигаясь по дереву игры от конца к началу, мы приходим к выводу, что оптимальной стратегией по Штакельбергу для первой фирмы будет выбор сырков, а для второй - хлопьев. Таким образом, равновесие по Штакельбергу достигается в исходе $(20; 10)$.

Легко проверить, что равновесие по Нэшу всегда является равновесием по Штакельбергу (иллюстрацией служит пример «Игра на опережение»), но обратное не всегда верно.

Также преимущества первого хода проявляется в конкуренции по Курно[4] между двумя фирмами. Дуополия по Курно представляет собой модель, в которой два конкурирующих производителя однородной продукции выбирают свой выпуск, исходя из заданной функции совокупного спроса и из предположения, что конкурент максимизирует свою прибыль, принимая выпуск другой фирмы является постоянным.

Таким образом, фирмы начинают с монопольной цены, а затем последовательно снижают цены до равновесного значения. Рассмотрим пример.

Пример. «Дуополия Курно»

Рынок поделён между двумя фирмами, каждая из которых выбирает свой объём выпуска: Q_1 – выпуск первой фирмы; Q_2 – выпуск второй фирмы. Совокупный выпуск (предложение) будет равен

$$Q = Q_1 + Q_2 \tag{1}$$

Уравнение кривой спроса на данном рынке задано и имеет вид:

$$P = 30 - Q \tag{2}$$

Требуется определить равновесную цену, если право первого хода принадлежит первой выпуск.

Решение. По формуле $R = P \cdot Q$ найдём выручку первой фирмы

$$R_1 = P \cdot Q_1 = (30 - Q) \cdot Q_1 = (30 - Q_1 - Q_2) \cdot Q_1$$

$$R_1 = 30Q_1 - Q_1^2 - Q_1 Q_2 \tag{3}$$

[4] Курно, Антуан Огюстен (Cournot, Antoine Augustin) (1801–1877), французский экономист, философ и математик. Курно был первым автором, который дал определение функции спроса и начертил ее график. Курно также был первым экономистом, разработавшим модели монополии и дуополии.

Аналогично, выручка второй фирмы будет равна:

$$R_2 = 30Q_2 - Q_2^2 - Q_1Q_2 \qquad (4)$$

По формуле вычисления прибыли $П = R - C,$ находим прибыль каждой из фирм:

$$П_1 = R_1 - C_1 = 30Q_1 - Q_1^2 - Q_1Q_2 - C_1(Q_1),$$

$$П_2 = R_2 - C_2 = 30Q_2 - Q_2^2 - Q_1Q_2 - C_2(Q_2).$$

Предположим сначала, что каждая фирма является монополистом, следовательно, может выбирать выпуск, максимизирующий ее прибыль при постоянном выпуске конкурента. Оптимум (максимум прибыли) достигается в точке, где предельная выручка равна предельным издержкам $MR = MC$, т.е.:

$$MR_1 = MC_1$$

$$MR_2 = MC_2$$

Для упрощения будем считать, что

$$MC_1 = MC_2 = 0,$$

тогда первая фирма выбирает выпуск Q_1, при котором $MR_1 = 0$. Вторая фирма выбирает выпуск Q_2, при котором $MR_2 = 0$.

Предельная выручка фирм определяется как частная производная от выручки по объёму выпуска. Таким образом:

$$MR_1 = \frac{\partial R_1}{\partial Q_1} = \left(30Q_1 - Q_1^2 - Q_1Q\right)'_{Q_1} = 30 - 2Q_1 - Q_2$$

$$MR_2 = \frac{\partial R_2}{\partial Q_2} = 30 - 2Q_2 - Q_1$$

Найдём значение оптимальные значения Q_1 и Q_2

$$\begin{cases} 30 - 2Q_2 - Q_1 = 0, \\ 30 - 2Q_1 - Q_2 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

$Q_1 = Q_2 = 10$

Система (3) получается в предположении, что каждая фирма максимизирует свою выручку и предполагает, что её конкурент сделает то же самое.

Находим значение P и выручки обеих фирм:

$P = 30 - 20 = 10$

$R_1 = R_2 = PQ = 10 \cdot 10 = 100$

Если бы фирмы могли договориться между собой, то они бы выбрали такой выпуск Q, который максимизировал бы их общую выручку

$R = PQ$.

При этом $Q = 15$, а выпуск каждой из фирм, при справедливом дележе, был бы равен $Q_1 = Q_2 = 7{,}5$. Однако реализации этого исхода препятствует очередность ходов, которая дает преимущества фирме, обладающей правом первого хода.

Для простоты, будем считать, что каждая фирма выбирает один из трёх объёмов выпуска: 7,5; 10 и 15. В нижеприведенной таблице приведены выручки каждой из фирм для всех всевозможных исходов:

		вторая фирма		
		7,5	10	15
первая фирма	7,5	12,5; 12,5	97,75; 125	65,25; 112,5
	10	125; 93,75	100; 100	50; 75
	15	112,5; 56,25	75; 50	0; 0

Равновесным по Нэшу является исход со следующими результатами .

Теперь предположим, что первая фирма обладает правом первого хода, т.е. она выбирает объём выпуска и сообщает об этом второй фирме, которая, в свою очередь, выбирает объем выпуска, максимизирующий прибыль при заданном объеме выпуска конкурента. Таким образом, получаем следующие исходы:

- первая фирма – 7,5; тогда вторая фирма – 10, результат (93,75; 125);
- первая фирма – 10; тогда вторая фирма – 10, результат (100; 100);
- первая фирма – 15; тогда вторая фирма – 7,5, результат (112,5; 56,25).

Сравнивая полученные исходы по прибыли первой фирмы, находим равновесие по Штакельбергу, находящееся в исходе с результатами $(112{,}5; 56{,}25)$, выпуски фирм при этом $Q_1 = 15, Q_2 = 7{,}5$. Первая фирма выигрывает за счёт права первого хода, вторая фирма при этом теряет часть прибыли по сравнению с равновесием по Нэшу..

В реальности первая фирма, выбрав объём производства $Q_1 = 15$, должна убедить вторую фирму в том, что она не намерена отступать от этой стратегии. Для этого она может проводить рекламную компанию, вкладывать деньги и т.д. такие действия называются *стратегическим ходом.*

5.3. Теоретические основы модели Курно и модели Бертрана

Модель Курно. Ее преимущества и недостатки.

Существует много моделей олигополии, и ни одну из них нельзя считать универсальной, тем не менее, общую логику поведения фирм на этом рынке они объясняют. Первая модель дуополии была предложена французским экономистом Огюстеном Курно еще в 1938 г.

Его модель основывалась на следующих предпосылках:

- на рынке присутствуют только две фирмы;
- каждая фирма, принимая свое решение, считает цену и объем производства конкурента постоянными.

Модель Курно базируется на двух основных предположениях о поведении фирмы в условиях дуополии (олигополии):

во-первых, каждая фирма нацелена на максимизацию получаемой прибыли;

во-вторых, каждая из фирм предполагает, что при изменении собственного объема выпуска другая фирма сохранит свой объем выпуска на существующем уровне.

Тогда процесс достижения равновесия на рынке будет выглядеть следующим образом: одно из предприятий выбирает объем выпуска продукции, максимизирующий его собственную прибыль. Затем второе предприятие, предполагая, что уровень выпуска продукции первого остается неизменным, определяет собственный максимизирующий прибыль, объем выпуска. Этот процесс приспособления на рынке проходит через несколько стадий «действия и ответа» до того момента, пока фирмы не достигнут состояния равновесия, когда ни одна из фирм не будет стремиться к изменению собственного объема выпуска продукции.

При описании состояния рыночного равновесия теория Курно не предполагает, что фирмы выберут именно эти объемы выпуска. Предполагается только, что если фирмы выберут такие объемы производства, то рынок будет находиться в состоянии равновесия.

В теории Курно фирмы рассматриваются как совершенно равные (симметричные) друг другу по всем производственно-экономическим параметрам. Однако это не соответствует реальной действительности, где рынок предстает в асимметричном виде: одно из предприятий является «лидером» отрасли, а остальные принимают на себя роль «последователей». Такая модель дуополии была впервые предложена в 1934 г. Генрихом фон Стакелбергом.

Пример. Допустим, что на рынке действуют две фирмы: X и Y Как будет определять фирма X цену и объем производства? Помимо издержек они зависят от спроса, а спрос, в свою очередь, от того, сколько продукции выпустит фирма Y. Однако что будет делать фирма Y, фирме X неизвестно, она лишь может предположить возможные варианты ее действий и соответственно планировать собственный выпуск.

Поскольку рыночный спрос есть величина заданная, расширение производства фирмой Y вызовет сокращение спроса на продукцию фирмы X. На рис. 1 показано, как сместится график спроса на продукцию фирмы X (он будет сдвигаться влево), если Y начнет расширять продажу. Цена и объем производства, устанавливаемые фирмой X исходя из равенства предельного дохода и предельных издержек, будут снижаться соответственно от P_0 до P_1, P_2 и от Q_0до Q_1, .

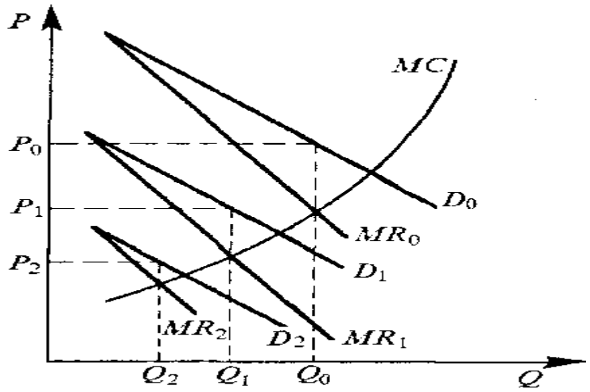


Рис 1. Модель Курно

Изменение цены и объема выпуска продукции фирмой X при расширении производства фирмой Y: D - спрос; MR - предельный доход; MC - предельные издержки.

Если рассматривать ситуацию с позиции фирмы Y, то можно начертить подобный график, отражающий изменение цены и количества выпускаемой продукции в зависимости от действий, предпринятых фирмой X.

Объединив оба графика, получим кривые реакции обеих фирм на поведение друг друга. На рис. 2 кривая X отражает реакцию фирмы X на изменения в производстве фирмы Y, а кривая Y- соответственно наоборот. Равновесие наступает в точке пересечения кривых реакций обеих фирм. В этой точке предположения фирм совпадают с их реальными действиями.

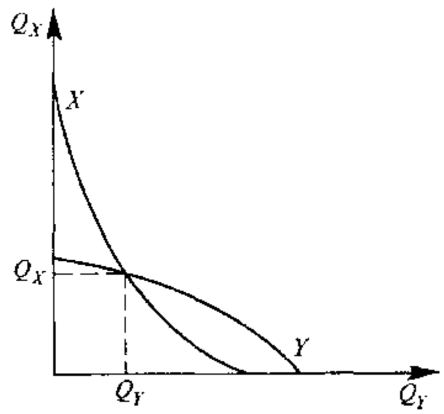


Рис. 2. Кривые реакции фирм X и Y на поведение друг друга

В модели Курно не отражено одно существенное обстоятельство. Предполагается, что конкуренты отреагируют на изменение фирмой цены определенным образом. Когда фирма Y выходит на рынок и отнимает у фирмы X часть потребительского спроса, последняя “сдается”, вступает в ценовую игру, снижая цены и объем производства. Однако фирма X может занять активную позицию и, значительно снизив цену, не допустить фирму Y на рынок. Такие действия фирмы X не охватываются моделью Курно.

Модель Бертрана. Ее преимущества и недостатки.

Модель Бертрана конкуренция по Бертрану - модель ценовой конкуренции на олигополистическом рынке, сформулированная французским математиком и экономистом Жозефом Бертраном в 1883 году.

Модель описывает поведение фирм на олигополистическом рынке, конкурирующих за счет изменения уровня цен на свою продукцию. Парадоксальный вывод модели - фирмы будут назначать цену, равную предельным издержкам, как и фирмы в условиях совершенной конкуренции- назван парадоксом Бертрана.

В модели приняты следующие предположения:

- На рынке имеется по меньшей мере две фирмы, производящие однородный продукт;
- Фирмы ведут себя некооперативно;
- Предельные издержки (*MC*) фирм одинаковы и постоянны;
- Функция спроса линейна;
- Фирмы конкурируют, устанавливая цену на свою продукцию, и выбирают ее независимо и одновременно;
- После выбора цены фирмы производят объем товара, равный величине спроса на их продукцию;
- Если цены различны, потребители предъявляют спрос на более дешевый товар;
- Если цены одинаковы, приобретаются товары всех фирм в равных долях.
- Модель статична (рассматривается принятие решения в единичный момент времени).

Предположение о ценовой конкуренции означает, что фирмы могут легко изменять объем выпуска продукции, однако изменить цену после выбора очень трудно или невозможно.

Равновесие в классической модели Бертрана:

- MC = предельные издержки
- p_1 = цена фирмы 1
- p_2 = цена фирмы 2
- p^M = монопольная цена

Оптимальная цена фирмы 1 зависит от ее ожиданий относительно цены, назначаемой фирмой 2. Назначение своей цены немного ниже цены конкурента позволяет получить весь спрос потребителей D и максимизирует прибыль. Если фирма 1 ожидает, что фирма 2 будет устанавливать цену, не превышающую предельных издержек MC, то еенаилучшим ответом является установление цены, равной предельным издержкам.

На диаграмме 1 показана функция наилучших ответов фирмы 1 $p_1''(p_2)$. Она показывает, что при $p_2 < MC$ фирма 1 устанавливает $p_1=MC$. При p_2 в интервале между MC и монопольной ценой p^M фирма 1 назначает цену немного меньше p_2. Наконец, если p_2 выше p^M, фирма 1 назначает монопольную цену $p_1=p^M$.

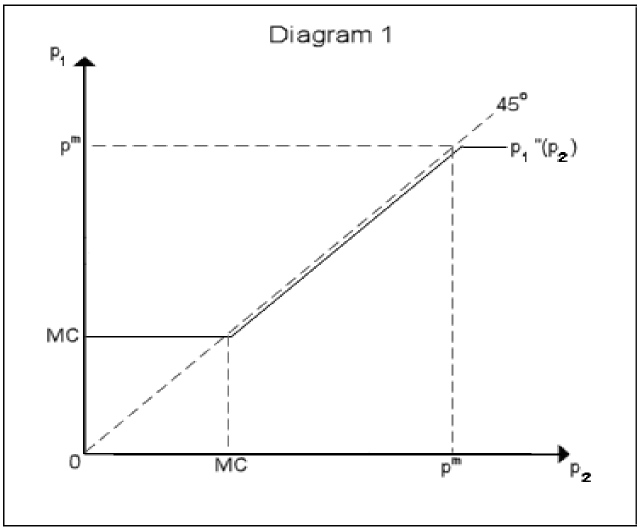


Диаграмма 1. Функция наилучших ответов фирмы 1.

Так как функции издержек обеих фирм одинаковы, наилучший ответ фирмы 2 p_2''(p_1) будет симметричным относительно диагонали I координатного угла. Функции наилучших ответов обеих фирм приведены на диаграмме 2.

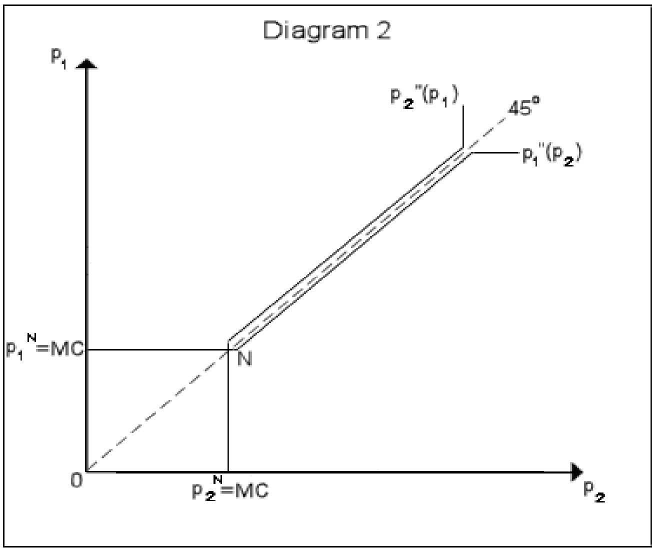


Диаграмма 2. Функция наилучших ответов фирмы 1 и фирмы 2

Результатом выбора стратегий фирмами является равновесие Нэша, представляющее собой пару цен (p_1, p_2) от которых невыгодно отклоняться ни одной фирме. Оно может быть найдено как точка пересечения кривых наилучших ответов (точка N на диаграмме). Видно, что в этой точке $p_1 = p_2 = MC$, т.е. обе фирмы устанавливают свои цены равными предельным издержкам

Модель Бертрана имеет два разумных исхода:

- кооперативный, подразумевающий достижение фирмами соглашения, при котором они взимают монопольную цену и обслуживают каждый по половине спроса потребителей;
- конкурентный, при котором фирмы действуют некооперативно и устанавливают цену на уровне предельных издержек.

В несимметричном случае, когда одна из фирм имеет более низкие предельные издержки (например, при использовании лучшей технологии производства), она может устанавливать цену ниже предельных издержек конкурента и получить весь рынок. Это явление получило название" предельного ценообразования".

Парадокс Бертрана экономической теории - ситуация, когда два олигополиста, конкурируя между собой и достигнув равновесия Нэша, оказываются с нулевой полной прибылью. Парадокс назван по имени его создателя Жозефа Бертрана.

Парадокс проявляется вмодели Бертрана, описывающей конкуренцию в олигополии.

Модель в простейшем варианте, в котором и проявляется парадокс, рассматривает очень упрощённый рынок и использует очень сильные допущения:

- компании производят одинаковый товар, спрос ограничен и как-либо задан;
- компания, назначившая наименьшую цену, получает себе весь спрос;
- если наименьшую цену назначили две и более компании, они делят спрос поровну.

Допустим, две компании A и B вышли на рынок и назначили некоторые цены p_A и p_B. Допустим, $p_A < p_B$. Цена компании B больше, и спрос на её товар равен 0. Чтобы получить спрос, ей нужно назначить цену не выше p_A. Если она назначит цену равную p_A, то получит себе половину рынка, а если снизит ещё на бесконечно малую величину о (p_A-о), то спрос удвоится до всего рынка.

Таким образом компаниям выгодно поочерёдно снижать цены вплоть до уровня предельных издержек, то есть себестоимости (предполагается, что она одинаковая у A и B). Повышать цену невыгодно никому, снижать цену тоже невыгодно - это ведёт к убыткам. Эта ситуация будет равновесием Нэша.

Парадокс заключается в том, что, если на рынке была монополия, а затем пришла ещё одна фирма (стала дуополия), цена сразу падает до уровня рынка совершенной конкуренции и остаётся такой же с входом других фирм на рынок. Это не реалистично, поскольку в дуополии фирмы не конкурируют так ожесточённо, и эмпирические исследования показывают, что дуополии работают с прибылью. Кроме того, с ростом числа фирм на рынке цены снижаются.

Некоторые принципы, которые не соблюдает парадокс Бертрана:

- Ограничения производственных мощностей — Иногда у фирм нет мощностей, чтобы удовлетворить весь спрос. В вариации модели Бертрана также учитывается этот неудовлетворённый, остаточный спрос.
- Динамическая конкуренция - повторение игры может привести к тому, что цена будет выше предельных издержек.
- Больше прибыли за бо́льшую цену - если одна фирма назначила цену значительно выше, вторая может поднять свою и увеличить прибыль, таким образом цены могут расти.

Поведение и взаимодействие фирм на рынке в условиях дуополии и олигополии.

Допустим, что в регионе есть только два производителя товара X. Любому желающему приобрести товар X приходится приобретать его у одного из этих двух производителей. Товар X каждой фирмы стандартизирован и не имеет качественных различий. Никакой другой производитель не может войти на рынок. Допустим, что оба производителя могут выпускать товар X при одинаковых затратах и что средние издержки неизменны и равны, следовательно, предельным издержкам. График A рис. 10, показывает рыночный спрос на товар X, помеченный Dm, вместе со средними и предельными издержками производства. Если бы товар X производился на конкурентном рынке, то выпуск был бы Qc ед., а цена была бы Pc=AC=MC.

Двумя фирмами, выпускающими товар X являются фирма A и фирма B. Фирма A начала производить товар X первая. До того, как фирма B начинает производство, фирма A обладает всем рынком и предполагает, что выпуск соперничающих фирм всегда будет равен нулю. Поскольку она считает, что обладает монополией, то производит монопольный выпуск, соответствующий точке, в которой MRm=MC. Получающаяся в итоге цена равна Pm. Предположим линейную кривую спроса. Это подразумевает, что предельный доход будет падать с ростом выпуска вдвое быстрее цены. Поскольку кривая спроса делит отрезок PcE пополам, то монопольный выпуск составляет половину конкурентного выпуска. Следовательно, первоначальный выпуск фирмы A, максимизирующий его прибыль составляет Qm ед.

Сразу же после того, как фирма A начинает производство, на рынке появляется фирма B. Появление новых фирм невозможно. Фирма B предполагает, что фирма A не будет отвечать изменением выпуска. Она, следовательно, начинает производство, предполагая, что фирма A будет продолжать выпускать Qm ед. товара X. Кривая спроса, который фирма B видит для своего товара, показана на гр. B рис. 10. Она может обслужить всех тех покупателей, которые купили бы товар X, если бы цена упала ниже текущей цены фирмы A, Pm. Следовательно, кривая спроса на ее выпуск начинается при цене Pm, когда рыночный спрос составляет Qm ед. товара. Эта кривая спроса Db1, продажи вдоль этой кривой представляют собой прибавку, обеспечиваемую фирме В к текущему рыночному выпуску Qm ед., которые до этого момента выпускала фирма А.

Кривая предельного дохода, соответствующая кривой спроса Db1 - MRb1. Фирма В производит объем продукции, соответствующий равенству MRb1=MC. Судя по отсчету на оси выпуска от точки, в которой выпуск товара X равен Qm ед., видим, что этот объем составляет 0.5.X ед. товара. Увеличение рыночного предложения товара X с X до 1.5 X ед., однако, уменьшает цену единицы товара X с Pm до P1. В таблице 2 представлены данные выпуска продукции каждой фирмы за первый месяц деятельности. Максимизирующий прибыль выпуск каждой фирмы всегда составляет половину разницы между Qc и тем объемом производства, который, как она предполагает, будет иметь другая фирма. Конкурентный выпуск - это выпуск, соответствующий цене P =MC - в этом случае 2X ед. товара. Как показывает таблица фирма А начинает с производства 0.5 Qc, при условии, что выпуск ее соперника равен нулю. Тогда фирма В в этом месяце выпускает 0.5 X товара X, что составляет 0.5(0.5Qc)=0.25 Qc. Это половина разности между конкурентным выпуском и монопольным выпуском, который первоначально обеспечивала фирма А.

Падение цены товара X, вызванное дополнительным производством фирмы В, приводит к изменению кривой спроса фирмы А. Фирма А теперь предполагает, что фирма В будет продолжать выпускать 0.5.X ед. товара. Она видит спрос на свой товар X как начинающийся в точке кривой рыночного спроса, соответствующей месячному выпуску 0.5. X ед. Ее спрос теперь равен Da1, как показано на гр. С, рисунок 5.

Максимизирующий для нее прибыль выпуск равен теперь половине разности между конкурентным выпуском и тем объемом, который в настоящее время производит фирма В. Это происходит, когда MRa1=MC. Фирма А предполагает, что фирма В будет продолжать выпускать 0.5.X ед. товара после того, как он отрегулирует свой выпуск, следовательно, максимизирующий прибыль выпуск равен у фирмы

Суть модели Курно заключается в том, что каждая фирма принимает объем производства своего конкурента постоянным, а затем принимает собственное решение по объему производства. Чтобы увидеть, как это происходит, рассмотрим решение по объему производства, принимаемое фирмой 1. Допустим, фирма 1 считает, что фирма 2 ничего производить не будет. Тогда кривая спроса фирмы 1 совпадает с кривой рыночного спроса. На рис. 1 это показано как Di (О), что означает кривую спроса для фирмы 1 при условии, что фирма 2 ничего не производит. Рис. 1 также показывает соответствующую кривую предельного дохода MRi(O). Мы предположили, что предельные издержки MCi фирмы 1 постоянны. Как показано на рисунке, максимизирующий прибыль объем производства фирмы 1 составляет 50 единиц (точка, где MRi (О) пересекает MCi). Поэтому если фирма 2 ничего не производит, фирма 1 будет производить 50 единиц.

Занимаясь вопросом о соотношении спроса и цены, Курно, прежде всего фактически ввел в науку важное понятие *эластичности спроса.* Как уже сказано, обыденный опыт говорит, что при повышении цены данного товара спрос на него уменьшается, при снижении цены спрос увеличивается. Этот «закон спроса» Курно, обозначив спрос через *D,* а цену через *р,* записал в виде функции $D = F(p)$.

Курно отметил, что для разных товаров эта зависимость различна. Спрос может значительно меняться при относительно небольшом изменении цен, — это случай высокой эластичности спроса. И наоборот, спрос может мало реагировать на изменение цены,- это случай низкой эластичности спроса. Курно отмечал, что последнее относится, как это ни странно, и к некоторым предметам роскоши, и к предметам самой первой необходимости. Например, цена скрипки или астрономического телескопа может упасть вдвое, но едва ли это заметно повысит спрос: он ограничивается узким кругом любителей, для которых цена не главное. С другой стороны, цена на дрова может повыситься вдвое, но спрос сократится в гораздо меньшей степени, так как люди готовы скорое урезать другие расходы, чем жить в нетопленных домах. Таким образом, функция спроса может иметь различный вид и, следовательно, изображаться разными кривыми. Менее очевидное, но математически важнейшее предположение Курно состоит в том, что эта функция непрерывна, т. е. что любому бесконечно малому изменению цены соответствует бесконечно малое изменение спроса. Не без основания он полагает, что экономически этот принцип осуществляется тем полнее, чем «шире рынок, чем больше возможных комбинаций потребностей, состояний и даже капризов среди потребителей». Непрерывность функции означает, что ее можно дифференцировать, и открывает возможность применения дифференциального и интегрального исчисления к анализу спроса.

Валовая выручка за известное количество данного товара может быть, исходя из приведенных выше обозначений, записана как произведение pD или $pF(p)$. Курно дифференцирует эту функцию и ищет ее максимум, исходя из того предположения, что всякий товаропроизводитель, являясь «экономическим человеком», стремится максимизировать свой доход. Отсюда путем простейших преобразований Курно находит цену, соответствующую максимуму валовой выручки (дохода).

Эта цена зависит от вида функции спроса, т. е. от характера его эластичности. Очевидно также, что не самая высокая цена дает максимум выручки, а какая-то конкретная цена, к которой продавец стремится приблизиться путем проб и ошибок. Курно начинает анализ с простейшего, по его мнению, случая - естественной монополии. Предположим, говорит он, некто является владельцем источника уникальной по своим свойствам минеральной воды. Какую цену на эту воду должен установить владелец, чтобы обеспечить максимум дохода? Попытавшись ответить на такой вопрос, Курно переходит к более сложным случаям, вводя дополнительные факторы (издержки производства, конкуренцию, другие ограничения).

Он рассматривает случаи дуополии (два конкурирующих монополиста), ограниченного числа конкурентов и, наконец, свободной конкуренции. Таким образом, модель Курно строится в обратном отношении к действительному историческому процессу развития в XIX в.- от свободной конкуренции к монополии.

Весь анализ основывается на использовании единого метода - на определении экстремальных значений функций спроса, принимающих различный вид в зависимости от рыночной ситуации. Математическая строгость и логичность этого исследования производит сильное впечатление. Работа Курно резко отличается от современных ему произведений видных представителей буржуазной экономической мысли.

Язык Курно был для них совершенно незнакомым иностранным языком. Не удивительно, что его не поняли.

В зависимости от ситуации, некоторые олигополии могут действовать во многом так, как совершенно конкурентные рынки, имея цены равные или близкие к предельным издержкам. Другие, заключив или не заключив открытое соглашение, могут действовать больше как монополии, имея цены выше предельных издержек, и, в результате, - большие чистые убытки.

Когда экономисты не могут ответить на вопрос о положении на рынке с помощью чистой теории, они прибегают к статистическим методам. В идеале следовало бы измерить разрыв между ценой и предельными издержками в точке рыночного равновесия, но такая возможность открывается очень редко. При отсутствии достоверных данных о предельных затратах допустимо использовать косвенный подход. Если удается установить, что фирмы в концентрированных отраслях получают прибыли, превышающие альтернативную стоимость капитала, можно заключить, что они ведут себя больше как монополисты, чем как совершенные конкуренты. Если, с другой стороны, фирмы в отраслях с высоким уровнем концентрации получают только “нормальные доходы”, при которых нормы прибыли на капитал в более и в менее концентрированных отраслях. По этой причине многие споры о взаимодействии фирм на рынке в условиях олигополии фокусируются на нормах прибыли.

Стратегическим называется ***ход***, который влияет на выбор другого игрока в благоприятном направлении для игрока, делающего стратегический ход.

Влияние заключается в том, что стратегический ход воздействует на ожидание второго игрока относительно поведения первого. Таким образом, стратегический ход ограничивает выбор партнёра, предварительно ограничив собственное поведение. Делая стратегический ход, участник игры связывает себя обещаниями, вкладывает средства в действия, которые вынуждают партнёра выбирать благоприятные для первого участника стратегии. Но может оказаться, что второй участник не поверит стратегическому ходу первого игрока и сочтёт его действия *пустой угрозой*.

Пример. «Пустые угрозы при наличии доминирующих стратегий»

На рынке действуют две фирмы. Первая фирма производит многофункциональные мобильные телефоны, а вторая – простые. Если вторая фирма назначит низкую цену, то часть покупателей первой фирмы перейдёт на потребление продукции второй фирмы. Если же первая назначит низкую цену, то у второй фирмы останется лишь один выход – назначить более низкую, чем у первой фирмы цену. Прибыли фирм в зависимости от выбранных стратегий приведены в нижеприведенной таблице.

		Вторая фирма	
		высокая цена	низкая цена
первая фирма	высокая цена	100; 80	80; 100
	низкая цена	20; 0	10; 20

Имеет ли первая фирма возможность добиться выигрыш 100 с помощью стратегического хода?

Решение.

Для решения следует ответить на следующие вопросы:

1. Имеет ли вторая фирма доминирующие стратегии?

Вторая фирма имеет одну доминирующую стратегию – низкая цена.

2. Что является следствием из этого?

Какие бы действия не предпринимала первая фирма, вторая фирма будет назначать низкую цену.

3. Какая из фирм доминирует на рынке?

Доминирующей на рынке является первая фирма, т.к. её продукция является более разнообразной.

4. Как будут восприняты второй фирмой действия первой, которые она может предпринять для того, чтобы убедить вторую фирму назначить высокие цену?

5. Почему второй фирме не стоит воспринимать угрозы первой всерьёз?

Что бы ни делала первая фирма, вторая фирма знает, что первой фирме, при снижении цены на свою продукцию, будет только хуже.

6. Что изменится, если вторая фирма знает, что у первой фирмы репутация рискованного иррационального игрока?

В этом случае вторая фирма может поверить угрозам первой фирмы.

В данном случае реализации наиболее выгодного для первой фирмы равновесия по Штакельбергу мешает наличие доминирующих стратегий у второй фирмы.

Задания.

1. Какие стратегии в следующей игре, представленной в нормальной форме, выживают после последовательного исключения строго доминируемых стратегий? Найдите все равновесия по Нэшу.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{L} & \mathrm{C} & \mathrm{R} \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ M \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (2,1) & (1,1) & (4,2) \\ (3,4) & (1,2) & (2,3) \\ (1,3) & (0,2) & (3,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Игроки I и II торгуются по поводу того, как поделить один доллар. Оба игрока одновременно называют доли, которые они бы хотели иметь, S1 и S2 , где $0 \le S1,\ S2 \le 1$. Если $S1 + S2 \le 1$, то игроки получают названные доли; если $S1 + S2 > 1$, то оба игрока ничего не получают. Каковы равновесия по Нэшу в этой игре?

3. Рассмотрим модель олигополии по Курно с n фирмами. Пусть Q объем произведенной продукции фирмой i и пусть $Q = q1 + \ldots + qn$ – общий объем продукции на рынке. Предположим, что функция обратного спроса имеет вид $P(Q) = a - Q$ (для $Q \le a$, иначе $P = 0$). Полные затраты фирмы i на производство продукции в размере qi есть $C(q_i) = c \cdot q_i$, то есть постоянных затрат нет, а предельные затраты постоянны и равны c, причем $c < a$. Фирмы выбирают свои объемы производства одновременно. Найдите равновесие по Нэшу? Что будет происходить, если п стремится к бесконечности?

4. Рассмотрим следующий конечный вариант модели дуополии по Курно. Допустим, что каждая из фирм должна выбрать, производить ли половину монопольного объема продукции, $q_m/2 = (a - c)/4$, либо равновесный по Курно объем, $q_c = (a - c)/3$. Другие объемы производства в такой модели невозможны. Показать, что эта игра с двумя ходами эквивалентна дилемме Заключенного: каждая фирма имеет строго доминируемую стратегию и в равновесии обе фирмы оказываются в менее выгодном положении, нежели в ситуации, когда бы они выбрали сотрудничество (кооперацию).

Контрольные вопросы

1. Какая игра называется бесконечной?

2. Что такое дуополия?

3. Какие допущения сделаны относительно функции спроса в дуополии по Курно?

4. Какие допущения сделаны относительно функции издержек в дуополии по Курно?

5. Кому из участников рынка выгодна ситуация, когда фирмы конкурируют без сговора друг с другом?

6. Кому из участников рынка выгодна ситуация, когда фирмы вступают в сговор друг с другом?

ГЛАВА 6. ДИНАМИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ, НО НЕСОВЕРШЕННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

6.1. Понятие несовершенной информации, информационных множеств и совершенного по подиграм равновесия Нэша

Рассмотрим класс игр, называемых играми с несовершенной информацией, в которых игроки могут не знать полностью предысторию игры. Т.е. осуществляя очередной ход, они знают, что находятся в одной из вершин некоторого подмножества множества всех вершин дерева игры (так называемого информационного множества).

Примером игры с несовершенной информацией служит любая статическая игра. Ее можно искусственно динамизировать, задав произвольным образом порядок ходов и определив подходящим образом информационные множества.

«Выбор компьютера»

Предположим, что первый игрок ходит первым, второй—вторым. Есть две вершины, в которых ход принадлежит второму игроку, однако сам он не может различить, выбирая свои действия, в какой вершине он находится; другими словами, эти две вершины находятся в одном и том же информационном множестве.

Развернутая форма игр с несовершенной информацией несколько более сложна, чем развернутая форма игр с совершенной информацией.

Информационные множества должны быть заданы так, чтобы каждая вершина, кроме конечных, принадлежала одному и только одному из них, во всех его вершинах ход должен принадлежать одному и тому же игроку.

Множества возможных действий во всех вершинах одного и того же информационного множества должны быть одинаковыми. - в вершине 2, и в вершине 3 второй игрок выбирает между IBM и MAC.

Нормальная форма игры не является в общем случае адекватной для описания динамических игр. С ее помощью можно представлять корректно только статические игры.

Определение совершенного в подиграх равновесия в играх с несовершенной информацией совпадает с данным выше определением для игр с совершенной информацией. Отличие состоит в том, что подигра может начинаться не из любой вершины. Необходимо наличие всех вершин информационного множества.

6.2. Многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями

Рассмотрим класс игр, для анализа которых можно использовать (при естественной его модификации) алгоритм обратной индукции. Эти игры можно назвать играми с почти совершенной информацией. Другое название—многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями.

Такие игры можно разбить на несколько этапов $t = 1, \dots, T$, каждый из которых представляет собой одну или несколько статических игр. Пример такой игры - повторяющаяся конечное число раз статическая игра.

Начнем с двухпериодных игр. Каждый игрок i может выбрать, какое действие ai из множества Ai ему совершить Игра происходит в два периода.

Период 1. Игроки 1 и 2 выбирают свой действия a1 и a2 одновременно
и независимо.

Период 2. Игроки 3 и 4 узнают, какие действия a1 и a2 совершили игроки 1 и 2 в периоде 1 и на основе этой информации одновременно и независимо выбирают свои действия a3 и a4 .

После этого определяются выигрыши игроков ui(a1, a2, a3, a4).

Применить обратную индукцию непосредственно, как в играх с совершенной информацией, нельзя, поскольку в тех играх в предфинальной позиции все сводится к индивидуальному выбору одного игрока. Однако можно совместить принцип обратной индукции и равновесие Нэша.

Предположим, что при любых *a1* и *a2* существует и притом единственное РН *(a*3(a1,a2), a*4 (a1,a2))* в игре с двумя игроками: *{{3,4}, A3, A4, u3(a1, a2, a3, a4), u4(a1, a2, a3, a4)}.*

Игроки 1 и 2 могут на этом основании предвидеть поведение игроков 3 и 4 . Тогда в ***периоде 1*** получится следующая игра двух лиц: *{{1,2}, A1, A2, u1(a1, a2, a*3(a1 , a2), a*4 (a1 , a2)), u2(a1, a2, a*3(a1 , a2), a*4 (a1 , a2))}.*

Пусть в этой игре существует РН *(a*1, a*2),* тогда применение обратной индукции на основе РН приводит к успеху.

Модель банка

Существует много моделей построенных по схеме двухпериодной игры.

Модель банка:

1. Два инвестора положили деньги в банк на депозит в размере *D* каждый;
2. Банк вкладывает эти деньги в некоторый *проект,* который через два периода должен принести доход *2R*;
3. Инвестор имеет право забрать деньги после *первого периода*, но тогда проект не будет реализован и удастся вернуть только *2r*;

4. После *второго периода* деньги можно забирать без ущерба для проекта, причем первый имеет преимущество

$R > D > r >$ D/2

	взять	нет
взять	r,r	D,2r-D
нет	2r-D, D	

	взять	нет
взять	R,R	D,2R-D
нет	2R-D, D	

Во втором периоде имеется одно РН.

2. Подставим выигрыши в этом РН в игру первого периода.

3. Получается два равновесия РН.

4. Равновесие *(нет, нет)* лучше для обоих инвесторов.

5. Равновесие *(взять, взять)* возникает при бегстве капитала из банка из-за испуга, что кто-то заберет деньги из банка

	взять	нет
взять	***r,r***	***D,2r-D***
нет	***2r-D,D***	

	взять	нет
взять	***r,r***	***D,2r-D***
нет	***2r-D,D***	***R,R***

Выводы: Имеем 2 РН. Одно из них *RR* предпочтительнее другого, но ситуация ***r,r*** может возникнуть из-за слухов: *«бегство капитала из банка».* Эта ситуация не является единственным равновесием, но одним из
РН, которое может реализоваться.

	взять	нет
взять	***r,r***	***2r-D,D***
нет	***D,2r-D***	***R,R***

Выводы: Имеем 2 РН. Одно из них *RR* предпочтительнее другого, но ситуация *r,r* может возникнуть из-за слухов: *«бегство капитала из банка».* Эта ситуация не является единственным равновесием, но одним из РН, которое может реализоваться.

Международная конкуренция

Две страны участвуют в ***международной торговле*** друг с другом. В ***каждой стране*** имеется **правительство**, **фирмы** и **потребители**.

1. **Правительство *i*** определяет тарифы ***ti***.
2. **Фирма** страны ***i*** производит продукцию ***hi*** для потребления внутри страны и ***ei*** на экспорт в др.страну.
3. **Потребители** покупают продукцию по цене ***Pi(Qi)=a-Qi*** , где ***Qi=hi+ej .***
4. **Затраты фирмы** складываются из производственных затрат: ***c* ·** ***(hi + ei)*** и экспортной пошлины: ***tj · ei*** .

Игра происходит в ***два этапа (периода):***

1. Сначала **правительства** обеих стран ***одновременно и независимо*** назначают **тарифы**;

2. Затем, ***зная эти тарифы***, **фирмы участвуют на объединенном рынке** двух стран (дуополия Курно), **назначая выпуски** продукции для внутреннего потребления и на экспорт.

1. **Выигрыш фирмы** определяется их ***прибылью***. (πi)

2. **Выигрыш государства** учитывает ***интересы потребителей*** и ***фирмы*** своей страны, а также ***доходы*** от пошлины на импорт. (Wi)

Выигрыш покупателей на графике соответствует площади заштрихованного треугольника.

$Pi(Qi\ ) = a - Qi\ ,\ Qi = hi + e\ j$

$c\ \cdot(hi + ei\ )+ t\ jei$

$Wi(ti\ t\ j\ hi\ ei\ h\ j\ e\ j\ )= Qi + i(ti\ ,t\ j\ ,\ hi\ ,\ ei\ ,\ h\ j\ ,\ e\ j\ )+ tie\ j$

Фиксируем тарифы и найдем ***равновесие Нэша*** в игре фирм (найдем ***h*1, h*2, e*1, e*2***) для которых выполнено условие максимума прибыли). Т.к. функция **выигрыша** распадается на ***два слагаемых*** (внутренний рынок и экспорт), то преобразуем задачу.

$(h1^*, h2^*, e1^*, e2^*)$.

Подставив равновесие Нэша в игре корпораций, зависящей от тарифов, как от параметров, в функции выигрыша государств, найдем равновесие Нэша в игре государств, назначающих тарифы. (все переменные, кроме тарифов, опущены) -отрицательные тарифы

$W1(t1,t2)+W2(t1,t2)$

$ti = -(a - c)$

Суммарный выпуск продукции в каждой стране будет равен ***5·(ac)/9*** . Для ***потребителей*** это **хуже**, чем при нулевых тарифах, когда страны объединяются в один рынок с **дуополией Курно** и суммарным выпуском продукции ***2· (a-c)/ 3.***

С точки зрения ***правительства***, **максимум** выигрышей двух стран достигается при ***нулевых тарифах.***

РН для правительства достигается в доминирующих стратегиях, но оно хуже чем свободная неравновесная торговля.

ГЛАВА 7. ИГРЫ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ: ТЕОРИЯ МЭТЧИНГА (MATCHING)

7.1.1. Суть теории мэтчинга

Экономика изучает, как взаимодействуют люди. Можно добавить, что взаимодействуют в ходе удовлетворения своих целей в условиях ограниченности ресурсов. Когда-то данное взаимодействие было примитивным, и ограничивалось, главным образом, ведением домашнего хозяйства в рамках семьи или общины. Теперь хозяйственные отношения между людьми включают в себя фантастическое количество разнообразных форм: трудовые контракты, отложенные денежные обязательства, операции с недвижимостью и ценными бумагами и тысячи других.

В условиях тесно сплетенной паутины хозяйственных взаимоотношений практически любое решение индивида затрагивает интересы множества других лиц. Индивид, делая выбор, должен учитывать данные интересы и возможную ответную реакцию других лиц. Принятие во внимание интересов других лиц называется в экономической теории стратегическим поведением.

Стратегическое поведение – поведение индивида, при котором он учитывает возможную ответную реакцию других лиц.

Принятием решений в условиях возможной ответной реакции контрагентов занимаются такие отрасли экономики как теория игр и теория конфликтов. В этой главе мы кратко рассмотрим основные положения каждой из этих теорий и научимся решать типовые задания. Кроме этого, с помощью теории мэтчинга (matching) мы рассмотрим, как образуются пары между взаимодействующими экономическими агентами.

Теория игр- эта относительно молодая ветвь математики была создана в 1930е годы Джоном фон Нейманом и Оскаром Моргеншетрном. Фон Нейман был замечательным математиком, и практически в одиночку создал теорию информации и теорию игр. Его исследования во многом поспособствовали развитию вычислительной техники и появлению компьютера. Позже, в 1950-е годы большую роль в развитие теории игр внес американский математик, лауреат Нобелевской премии по экономике, Джон Нэш. История жизни Джона Нэша настолько необычна, что легла в основу фильма «Игры разума» 2001 года. В школе Нэш не любил математику, поскольку ее преподавали посредственно. Но в 14 лет к нему в руки попала книга «Творцы математики» Эрика Белла, после прочтения которой он смог доказать малую теорему Ферма. Чуть позже Нэш наткнулся на труды фон Неймана и Моргенштерна, и в 21 год он написал диссертацию по теории игр. Именно за эту работу он получил в 1994 году Нобелевскую премию по экономике.

Теория игр (game theory) изучает, каким образом выстраивают свое поведение агенты в так называемых «играх» - ситуациях, когда результат принятия решений зависит не только от поведения данного агента, но и от поведения других участников игры.

Индивид, принимая решения, может догадываться о том, как будут вести себя другие участники игры. Индивид будет принимать решение исходя из рациональной догадки о поведении других. Говорят, что в этом случае индивид следует определённой игровой стратегии.

Игровая стратегия – это линия поведения участника в зависимости от предположений об ответных действиях других участников. Доминирующая игровая стратегия – это стратегия, при которой участник получает максимальный выигрыш при любых действиях других сторон.

Что такое игровая стратегия и доминирующая игровая стратегия лучше всего показать на конкретном примере – простейшей игре под названием «дилемма заключенного», анализ которой и положил начало теории игр.

Дилемма заключенного - это игра между двумя участниками с двумя возможными исходами и одновременными ходами.

Суть игры заключается в следующем. Представьте, что вы с напарником совершили преступление, например, ограбили банк. Полиция поймала вас обоих и теперь проводит допрос каждого из них в разных камерах. Полиция предлагает вам сделку: вы даете показания на своего напарника, и тогда выходите на свободу. Такую же сделку предлагают вашему напарнику.

Каждый из преступников имеет выбор: давать показания на напарника или молчать. Если вы оба даете показания друг на друга, то каждый получает по 2 года тюрьмы. Если вы оба молчите, то в полной мере вашу вину будет трудно доказать, и каждый получит только по 1 году. Но если вы даете показания на вашего подельника, а он нет, то вы выходите на свободу, а ваш подельник получает 5 лет тюрьмы.

Таким образом, приговор, который получит каждый преступник, зависит не только от его показаний, но и от показаний другого преступника.

То есть 4 варианта действий:

1. Вы даете показания, а напарник молчит. Тогда вы выходите на свободу, а напарник садится на 5 лет.

2. Вы даете показания, и ваш напарник дает показания. Вы оба получаете по 2 года.

3. Вы молчите, и напарник молчит. Вы выходите на свободу через 1 год в виду недостаточности улик для более серьезного обвинения.

4. Вы молчите, а напарник дает показания. В этом случае вы садитесь на 5 лет, а напарник выходит на свободу.

Какой вариант выберается в данной ситуации?

Джон Нэш задал этот простой вопрос, и, проанализировав такую игру, пришел к выводам, которые совершили переворот во взглядах экономистов на то, как принимают решения люди при взаимодействиях друг с другом.

Ниже приведена матрица результатов для преступников в зависимости от их действий:

		заключенный А	
		признаться	не признаться
Заключенный В	признаться	(2;2)	(5;0)
	не признаться	(0;5)	(1;1)

В каждой клеточке сначала идет срок наказания для преступника А, потом срок наказания для преступника В.

Ход рассуждений каждого преступника:

Преступник А: я не знаю, как поведет себя преступник В. Если он не даст показания, то мне лучше их дать, потому что тогда я выйду на свободу. Если он будет молчать, то мне опять же лучше дать показания, потому что тогда я получу 2 года наказания, а не 5. Поэтому мне лучше дать показания вне зависимости от того, как поведет себя мой подельник.

Аналогичным образом рассуждает преступник В.

Таким образом, доминирующей игровой стратегией для каждого из них становится дача показаний. В этом случае игровое равновесие устанавливается, когда они оба признаются и получат по 2 года наказания.

Данное равновесие достигается потому, что стратегия «дать показания» каждого участника является оптимальной при заданной стратегии другого участника. Достигнутое равновесие является **равновесием по Нэшу**.

Равновесие Нэша – равновесие, когда каждый участник игры выбирает стратегию, которая является для него оптимальной при условии, что остальные участники игры придерживаются определенной стратегии.
Нетрудно увидеть, что Нэш-равновесие не является наиболее оптимальным для участников. Если бы они оба выбрали стратегию «не признаться», то получили бы только по 1 году.

В этом случае говорят, что равновесие не является *Парето-оптимальным*[1]. Если бы преступники смогли договориться заранее, то, возможно, они смогли бы достичь Парето-оптимального равновесия. Но даже в случае договоренности каждый из них имеет стимулы отступить от договоренностей и признаться, чтобы избежать наказания полностью. В этом случае эгоистические интересы каждого из участников и недоверие к напарнику заставляют преступников выбрать вариант «признаться». Согласованное поведение участников будет нерациональным с индивидуальной точки зрения каждого из участников.

Выводы Джона Нэша стали революционными. Адам Смит считал, что когда каждый член группы действует эгоистично, преследуя свои собственные интересы, это ведет к эффективному равновесному состоянию этой группы. Этот принцип был назван ***«невидимая рука рынка»***. Джон Нэш показал, что когда каждый член группы действует только в своих интересах, это не приводит к достижению максимальных интересов всей группы.

Эта идея часто иллюстрируется с помощью так называемого ***«парадокса блондинки»***. Допустим, компания холостяков отправляются вечером в бар, где за соседним столиком сидит компания молодых девушек, из которых одна является блондинкой. Каким образом компании молодых людей стоит начать знакомиться с девушками?

Если каждый из них попытается познакомиться сначала с блондинкой, то она не достанется никому. В этом случае остальные девушки (брюнетки) оттолкнут молодых людей, поскольку никто не хочет быть девушкой второго сорта. Компания молодых людей останется без девушек. Но вот если блондинку никто не заметит, то каждый из молодых людей найдет себе не менее достойную девушку.

На этом простом примере показывается, что преследование эгоистичных интересов может не всегда отвечать интересам группы. Если Адам Смит считал, что каждый индивид должен преследовать только свои личные интересы, то Джон Нэш ответил, что не только свои, но и интересы группы.

Дилемма заключенного и парадокс блондинки являются красивой метафорой. Тем не менее, в реальной жизни можно найти множество ситуаций, когда аппарат теории игр находит полезное применение.

На рынках многих благ существует так называемая дуополия – ситуация, когда рынок контролируется двумя крупными игроками. Например, на рынке прохладительных напитков можно обнаружить два гиганта: Coca-Cola company и Pepsi-Cola, на рынке самолетостроения есть два гиганта - Airbus и Boeing. Решение одного их игроков, например, о проведении рекламной кампании, отражается не только на его положении, но и на положении другого участника. В этой ситуации конкурирующие стороны начинают соперничать, неимоверно раздувая собственные рекламные бюджеты. Им можно было бы снизить объемы рекламы и увеличить получаемую прибыль, но для этого им нужно сначала договориться.

На простейшем примере игры «дилемма заключенного» показывается, что устойчивое равновесие в игре (так называемое равновесие по Нэшу) не обязательно обеспечивает наилучший для участников результат (так называемый Парето-оптимум). Дилемма заключенного является примером одномоментной игры, в которой участники принимают решения одновременно. Также существуют последовательные игры, в которых участники принимают решения один после другого. Примеры с обоими видами игр рассматриваются нами в главе «Олигополия».

Чистые и смешанные стратегии поведения

Принимая решения в реальной жизни, все сталкиваются со множеством игр. Субъект принимает решения, ожидая определенного ответного поведения от ваших партнеров по бизнесу, начальника по работе, одногруппников по университету, возлюбленной. Нередко окружающие люди предлагают сыграть в игру, в которой один из вариантов выглядит для субъекта более выгодным. Субъект выбирает данный вариант, и вскоре сталкивается с новой игрой, и после нескольких подобных ходов обнаруживаете, что попали в непростую ситуацию: случилось то, чего Субъект не хотел ни при каких обстоятельствах. Сейчас, с помощью понятий чистых и смешанных игровых стратегий, мы покажем, что во многих играх Ваше непредсказуемое поведение (например, основанное на подбрасывании монетки), станет лучшей стратегией.

Чистая стратегия – определенная реакция игрока на возможные варианты поведения других игроков.

Смешанная стратегия – вероятностная (не определенная точно) реакция игрока на поведение других игроков.

Рассмотрим простую игру. У субъекта 1 есть шарик, который он прячет за спиной в левую или правую руку. Другой субъект 2 пытается угадать, в какой руке шарик. Если субъект 2 угадывает, субъект 1 платит второму 1 доллар. Если субъект 2 не угадывает, то он платит один доллар субъекту 1. Они оба пытаются выиграть, и ведут себя разумно. В данной игре у каждого из игроков есть по две чистых стратегии: субъект 1 может положить шарик в правую или левую руку, субъект 2 может сказать, в какой руке шарик: в правой или левой.

Если субъект 1 всегда будет класть шарик в одну и ту же руку, субъект 2 быстро это заметит и обыграет соперника. Если субъект 1 будет чередовать руки (сначала класть в левую, потом в правую, потом опять в левую), то скоро субъект 2 это опять заметит, и обыграет другого. В этих условиях, догадываясь о предполагаемом ответе, субъект 2 будет стараться всякий раз менять руку, в которой находится шарик.

Рассмотрим это подробнее. Если стратегия субъекта 1 заключается в том, чтобы класть шарик в правую руку, то стратегия соперника заключается в том, чтобы сказать, что шарик в правой руке. Это является одним из видов его чистой стратегии. Если субъекта 1 догадывается об ответе соперника, то лучшей стратегией будет поменять руку. Это является вариантом субъекта 1 чистой стратегии. Таким образом, чистые стратегии в этой игре не приведут к равновесию. Любой рациональный вариант поведения субъекта 2 невыгоден для другого, любой рациональный вариант поведения субъекта 1 невыгоден второму. Однако в подобной игре все же существуют разные стратегии, являющиеся равновесными для них обоих. Это означает, что игроки будут придерживаться определенного поведения *вне зависимости от поведения противоположной стороны*. Как выглядят подобные стратегии? Для ответа на этот вопрос давайте осознаем, что какое бы правило я ни изобрел, в конце концов, оно будет применено против меня. Поэтому моим лучшим решением для выбора руки станет … подбросить монетку. На языке теории игр это означает «смешать стратегии». Какую стратегию в этом случае выберет субъекта 2? Зная, что поведение определяется случайным образом, субъекта 1 также не будет конструировать каких-либо правил угадывания – ведь со временем они будут разгаданы.

Поэтому лучшей стратегией также становится подбросить монетку. Принятие решения на основе подбрасывания монетки стало равновесием в этой игре.

Для лучшей иллюстрации приведем еще одну игру[2]. Допустим, вы пытаетесь укрыться в одном из множества убежищ на поле, а я летаю на бомбардировщике и пытаюсь сбросить на Вас бомбу. Моей задачей является угадать, в каком убежище укрылись Вы. Вашей задачей становится сделать так, чтобы моя догадка оказалась неверной. Вашей первой идей станет спрятаться в лучшем по надежности убежище. Догадываясь об этом, я попытаюсь сбросить бомбу именно туда. Это будет моей чистой стратегией. Если Вы подумаете дальше, то Вы не будете укрываться в лучшем по надежности убежище, а попытаетесь укрыться во втором по надежности. Это станет Вашей чистой стратегией в ответ на мою догадку. Если Вы достаточно умны, то Вы не будете придерживаться определённой чистой стратегии, а вместо этого прибегните к помощи случайности. Вы выберете убежища, которые дают Вам максимальный суммарный шанс выжить, а потом взвоете к случайности, подбросив монетку. Именно это сделаю и я.

Смешанные стратегии часто используются людьми в реальной жизни, хотя они могут даже не знать об этом. В книге Константина Сонина «Уроки экономики» рассматривается, что смешанные стратегии активно используются профессиональными спортивными игроками: например, футболистами при пробитии пенальти или теннисистами при подаче.
Таким образом, случайное поведение может стать лучшим решением даже в некоторых Ваших повседневных выборах.

7.1.2. Некоторые примеры игр

Решение об объеме выпуска двух гигантов, конкурирующих на рынке производства пассажирских самолетов: «Боинг» и «Эйрбас». Предельные издержки производства самолетов одинаковы у каждой компании и равны 10 млн. долларов за штуку.
Рыночный спрос выглядит следующим образом:

P, млн $	**Q, штук**
0	200
10	180
20	160
30	140
40	120
90	110
50	100

55	90
60	80
70	60
80	40
90	20
100	0

В случае, если «Боинг» и «Эйрбас» договариваются о разделе рынка пополам, то их прибыль выглядит следующим образом:

P, млн $	**Q, штук**	**TR, млн$**	**TC, млн$**	**общая прибыль**	**прибыль каждого участника**
0	200	0	2000	-2000	-1000
10	180	1800	1800	0	0
20	160	3200	1600	1600	800
30	140	4200	1400	2800	1400
40	120	4800	1200	3600	1800
90	110	9900	1100	8800	4400
50	100	5000	1000	4000	2000
55	90	4950	900	4050	2025
60	80	4800	800	4000	2000
70	60	4200	600	3600	1800

80	40	3200	400	2800	1400
90	20	1800	200	1600	800
100	0	0	0	0	0

Прибыль участников будет максимальна, если они оба произведут по 45 самолетов (вместе 90) и равна в этом случае 2025 млн $. Эта точка является Парето-оптимумом, то есть в ней состояние одного участника нельзя улучшить без ухудшения состояния другого.

Каждый из участников может думать следующим образом:

Если я произвожу 45 самолетов и мой конкурент производит 45 самолетов, то наша общая прибыль будет максимальной, и я получу половину от максимальной общей прибыли. Однако что мешает мне произвести не 45, а 55 самолетов? В этом случае, если мой конкурент не предпримет ответных действий, общий объем продаж вырастет до 100, цена упадет до 50, а получу выручку 55*50=2750 и прибыль 2750-550=2200. Тогда прибыль моего конкурента составит 50*45-10*45=1800.

Точно также может думать и другой участник, и в таком случае они оба произведут по 55 самолетов. В этом случае общий объём продаж вырастет до 110, цена упадет до 45, общая прибыль будет равна 1925, и каждый из участников получит прибыль 1925.

Игра этой ситуации описывается следующей матрицей выигрышей (payoff matrix):

	Боинг	
	произвести 45	**произвести 55**

Эйрбас	**произвести 45**	(2025;2025)	(2200;1800)
	произвести 55	(1800;2200)	(1925;1925)

Первое значение в скобках означает прибыль Боинга, второе – прибыль Эйрбаса.

Если между участниками не заключено договоренностей, то каждый из них имеет стимулы произвести 55, а не 45 штук, чтобы увеличить свою прибыль. В этом случае производство 55 штук является доминирующей стратегий для каждого участника. Нэш-равновесие устанавливается в ситуации, когда они оба производят по 55 штук и получают прибыль в размере 1925 млн $. Это равновесие не является Парето-оптимальным.

Данная ситуация показывает, как эгоистические интересы каждого из участников мешают им достигнуть оптимального значения прибыли.

ПРАКТИКУМ

Матричная игра. Доминирование стратегий.

Задания для практических занятий.

№1. Игроки А и В записывают по две цифры: 1 или 2. Игра состоит в том, что, кроме своей цифры 1 или 2, каждый игрок записывает еще и ту цифру, которую, по его мнению, записал партнер. Если оба игрока угадали или оба ошиблись, то партия заканчивается вничью; если же угадал только один, то он получает столько очков, какова сумма записанных им цифр. Составить платежную матрицу игры.

Ответ:

A / B	1; 1	1;2	2;1	2;2
1; 1	0	2	-3	0
1; 2	-2	0	0	3
2; 1	3	0	0	-4
2; 2	0	-3	4	0

№2. Армия полковника сражается с противником за контроль над позицией. Полковник имеет 2 полка, а противник – 3. Каждый из них может послать на позицию целое число полков. Позиция будет захвачена армией с большим числом полков. Составить платежную матрицу игры.

Ответ:

полк. / прот.	0	1	2	3
0	0	-1	-1	-1
1	1	0	-1	-1
2	1	1	0	-1

№3. Для отопления коттеджа в зимний период используется уголь, цена на который зависит от времени года и характера зимы. Летом тонна угля стоит 7,5 ден. ед., в мягкую зиму – 8,5, в обычную – 9,0, а в холодную – 9,5. Расход угля в отопительный сезон полностью определяется характером зимы: в мягкую зиму достаточно 6 т., в обычную требуется 7 т., а в холодную расходуется 8 т. Понятно, что затраты домовладельца зависят от количества запасенного им с лета угля. При анализе возможных вариантов уровня запаса следует иметь в виду, что при необходимости недостающее количество угля можно приобрести зимой. Кроме того, надо учесть, что продать непотребовавшийся уголь возможности не будет. Используя игровой подход, составить платежную матрицу.

Ответ:

Д / З	малая зима	обычная зима	холодная зима
малая зима	45	54	64
обычная зима	52,5	52,5	62
холодная зима	60	60	60

№4. Фирмы $Ф_1$ и $Ф_2$ производят сезонный товар, пользующийся спросом в течение n единиц времени. Доход от продажи товара в единицу времени составляет C ден. ед. Фирма $Ф_2$, будучи более состоятельной, в ходе конкурентной борьбы стремится вытеснить фирму $Ф_1$ с рынка сбыта, способствуя своими действиями минимизации ее дохода, не считаясь при этом с временными потерями части своего дохода в надежде наверстать упущенное в будущем. Действующее законодательство не позволяет злоупотреблять для этого заведомым занижением цены на товар (прибегать к демпинговым ценам). Единственным допустимым способом достижения своей цели для фирмы $Ф_2$ (как и для фирмы $Ф_1$ в целях защиты своих интересов на рынке сбыта) остаются повышение качества товара и надлежащий выбор момента времени поставки его на рынок сбыта. Уровень спроса на товар зависит от его качества, и в данный момент реализуется тот товар, качество которого выше. Повышение же качества требует дополнительных затрат времени на совершенствование технологии его изготовления и переналадки оборудования. В связи с этим будем предполагать, что качество товара тем выше, чем позже он поступает на рынок. Придать описанной ситуации игровую схему и построить платежную матрицу (для n = 5).

Ответ: A_i (i = 1, 2, …, 5) – чистая стратегия игрока A, состоящая в том, что он поставит свой товар в i-ую единицу времени; B_j (j = 1, 2, …, 5) - чистая стратегия игрока B, состоящая в том, что он поставит свой товар в j-ю единицу времени;

Ф 1 Ф2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	2,5C	C	2C	3C	4C
A_2	4C	2C	C	2C	3C
A_3	3C	3C	1,5C	C	2C
A_4	2C	2C	2C	C	C
A_5	C	C	C	C	0,5C

№5. Используя понятие доминирования, уменьшить размерность платежной матрицы:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельного решения.

№6. Два игрока A и B, не глядя друг на друга, кладут на стол по монете вверх гербом или вверх цифрой, по своему усмотрению. Если игроки выбрали одинаковые стороны (у обоих герб или у обоих цифра), то игрок A забирает обе монеты; иначе их забирает игрок B. Сформулировать ситуацию в терминах теории игр. Представить игру в нормальной и развернутой формах.

№7. Игроки A и B одновременно и независимо друг от друга записывают каждый одно из трех чисел: 1, 2 или 3. Если сумма написанных чисел четная, то B платит A эту сумму в рублях; если она нечетная, то, наоборот, A платит B эту сумму. Сформулировать ситуацию в терминах теории игр. Представить игру в нормальной и развернутой формах.

№8. Армия полковника сражается с противником за контроль над двумя позициями. Полковник имеет 2 полка, а противник – 3. И полковник, и противник посылают свою армию на сражение в полном составе. И полковник, и противник могут послать на каждую позицию целое число полков. Позиция будет захвачена армией с большим числом полков. Составить платежную матрицу игры.

№9. Используя понятие доминирования, уменьшить размерность платежной матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение игры в чистых стратегиях.

Задания для практических занятий.

№10. Предприниматели А и В продают однородный товар. А может рекламировать свой товар по радио (A_1), по телевидению (A_2), через газеты (A_3). В может рекламировать свой товар по радио (B_1), по телевидению (B_2), через газеты (B_3), через торговых агентов (B_4). Процент привлеченных клиентов предпринимателями А и В в зависимости от выбранной каждым стратегии задан платежной матрицей:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	-2	9	-3
A_2	6	5	6	8
A_3	-2	4	-9	5

Найти решение игры в чистых стратегиях.

Ответ: $(A_2, B_2); \gamma = 5.$

№11. Определить максиминную и минимаксную стратегии и решение игры в чистых стратегиях, если оно существует, для игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Ответ: $(A_2, B_2); \gamma = 0{,}7.$

№12. Определить максиминную и минимаксную стратегии и решение игры в чистых стратегиях, если оно существует, для игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $(A_2, B_3); \gamma = 4.$

№13. Определить седловую точку и цену игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: $(A_2, B_3); \gamma = 4.$

№14. Определить седловую точку и цену игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Ответ: $(A_3, B_2); \gamma = 0{,}6.$

№15. Указать диапазон цены игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ -5 & -2 & 10 & -3 \\ 7 & 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

Ответ: $2 < \gamma < 4.$

№16. Дана платежная матрица. Указать область значений параметров p и q, если седловая точка (2; 2): $\begin{pmatrix} 1 & q & 6 \\ p & 5 & 10 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $p \geq 5; q \leq 5.$

№17. Найти максиминную и минимаксную стратегии, нижнюю и верхнюю цены игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $(A_2; B_1); \alpha = 3; \beta = 4.$

Задания для самостоятельного решения.

№18. Найти нижнюю и верхнюю цены игры, предварительно упростив ее: $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

№19. Определить максиминную и минимаксную стратегии и решение игры в чистых стратегиях, если оно существует, для игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 10 \\ 8 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

№20. Определить максиминную и минимаксную стратегии и решение игры в чистых стратегиях, если оно существует, для игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 6 & 11 \\ 8 & 4 & 12 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

№21. Определить максиминную и минимаксную стратегии и решение игры в чистых стратегиях, если оно существует, для игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

№22. Определить седловую точку и цену игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -5 & 6 \\ -3 & -4 & -9 & -2 \\ 6 & 7 & -8 & -9 \\ 7 & 3 & -9 & 5 \end{pmatrix}$.

№23. Указать диапазон цены игры, заданной платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 & 8 \\ -2 & 10 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 7 \\ 7 & -2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение игры в смешанных стратегиях.

Задания для практических занятий.

№24. Решить графически игру, заданную платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ - смешанные стратегии игрока 1; $\left(\frac{5}{8};\frac{3}{8}\right)$ - смешанные стратегии игрока 2; $v = 1{,}75$ - цена игры.

№25. Решить графически игру, заданную платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{7};\frac{2}{7}\right)$ - смешанные стратегии игрока 1; $\left(\frac{1}{7};\frac{6}{7}\right)$ - смешанные стратегии игрока 2; $v = \frac{23}{7}$ - цена игры.

№26. Решить графически игру, заданную платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ - смешанные стратегии игрока 1; $\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$ - смешанные стратегии игрока 2; $v = 4{,}25$ - цена игры.

№27. Решить графически игру, заданную платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ - смешанные стратегии игрока 1; $\left(\frac{5}{8};\frac{3}{8}\right)$ - смешанные стратегии игрока 2; $v = 0{,}75$ - цена игры.

№28. Решить графически игру, заданную платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ - смешанные стратегии игрока 1; $\left(\frac{5}{8};\frac{3}{8}\right)$ - смешанные стратегии игрока 2; $v = 2{,}75$ - цена игры.

№29. Решить графически игру, заданную платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{7};\frac{2}{7}\right)$ - смешанные стратегии игрока 1; $\left(\frac{1}{7};\frac{6}{7}\right)$ - смешанные стратегии игрока 2; $v = \frac{16}{7}$ - цена игры.

№30. Решить графически игру, заданную платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ - смешанные стратегии игрока 1; $\left(\frac{5}{8};\frac{3}{8}\right)$ - смешанные стратегии игрока 2; $v = 3{,}75$ - цена игры.

№31. Игра состоит в следующем. Имеются две карты: туз и двойка. Игрок A наугад вынимает одну из них; B не видит, какую карту он вынул. Если A вынул туза, он заявляет: «у меня туз», и требует у противника 1 рубль. Если A вынул двойку, то он может либо A_1) сказать «у меня туз» и потребовать у противника 1 рубль, либо A_2) признаться, что у него двойка, и уплатить противнику 1 рубль. Противник, если ему добровольно платят 1 рубль, может только принять его. Если же у него потребуют рубль, то он может либо B_1) поверить игроку A, что у него туз, и отдать ему 1 рубль, либо B_2) потребовать проверки с тем, чтобы убедиться, верно ли утверждение А. Если в результате проверки окажется, что у А действительно туз, В должен уплатить А 2 рубля. Если же окажется, что А обманывает и у него двойка, игрок А уплачивает игроку В 2 рубля. Требуется проанализировать игру и найти оптимальную стратегию каждого из игроков.

Ответ:

A / B	B_1 (верить)	B_2 (не верить)
A_1 (обманывать)	1	0
A_2 (не обманывать)	0	0,5

Решения игры в чистых стратегиях нет. $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ - смешанные стратегии игрока А; $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ - смешанные стратегии игрока В; $v=\frac{1}{3}$ - цена игры.

№32. Сторона А посылает в район расположения противника В два бомбардировщика I и II; I летит спереди, II – сзади. Один из бомбардировщиков – заранее неизвестно какой – должен нести бомбу, другой выполняет функцию сопровождения. В районе противника бомбардировщики подвергаются нападению истребителя стороны В. Бомбардировщики вооружены пушками различной скорострельности. Если истребитель атакует задний бомбардировщик II, то по нему ведут огонь пушки только этого бомбардировщика; если же он атакует передний бомбардировщик, то по нему ведут огонь пушки обоих бомбардировщиков. Вероятность поражения истребителя в первом случае 0,3, во втором 0,7. Если истребитель не сбит оборонительным огнем бомбардировщиков, то он поражает выбранную им цель с вероятностью 0,6. Задача бомбардировщика – донести бомбу до цели; задача истребителя – воспрепятствовать этому, т.е. сбить бомбардировщик-носитель. Требуется выбрать оптимальные стратегии сторон: для стороны А - какой бомбардировщик сделать носителем; для стороны В - какой бомбардировщик атаковать?

Ответ:

A / B	B_1 (атаковать бомбард. I)	B_2 (атаковать бомбард. II)
A_1 (носитель – бомбард. I)	0,82	1
A_2 (носитель – бомбард. II)	1	0,58

Решения игры в чистых стратегиях нет. $(0{,}7;0{,}3)$ - смешанные стратегии игрока А; $(0{,}7;0{,}3)$ - смешанные стратегии игрока В; $v = 0{,}874$ - цена игры.

№33. Спортивный клуб А располагает тремя вариантами состава команды A_1, A_2, A_3. Клуб В – также тремя вариантами B_1, B_2, B_3. Подавая заявку для участия в соревновании, ни один из клубов не знает, какой состав изберет противник. Вероятности выигрыша клуба А при различных вариантах составов команд, примерно известные из опыта прошлых встреч, заданы матрицей:

A B	B_1	B_2	B_3
A_1	0,8	0,2	0,4
A_2	0,4	0,5	0,6
A_3	0,1	0,7	0,3

Найти, с какой частотой клубы должны выставлять каждый из составов во встречах друг с другом, чтобы добиться наибольшего в среднем числа побед.

Ответ: $\left(\frac{1}{7};\frac{6}{7};0\right)$ - смешанные стратегии клуба А; $\left(\frac{3}{7};\frac{4}{7};0\right)$ - смешанные стратегии клуба В; $v = 0{,}457$ - цена игры.

№34. Найти решение в смешанных стратегиях, предварительно убедившись, что решения в чистых стратегиях нет, для игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $(0{,}45;0{,}34;0{,}21)$ - смешанные стратегии игрока А; $(0{,}16;0{,}16;0{,}68)$ - смешанные стратегии игрока В; $v = -0{,}37$ - цена игры.

Задания для самостоятельного решения.

№35. Решить графически игру, заданную платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

№36. Решить графически игру, заданную платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

№37. Решить графически игру, заданную платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

№38. Решить графически игру, заданную платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

№39. Найти решение в смешанных стратегиях, предварительно убедившись, что решения в чистых стратегиях нет, для игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

№40. Найти решение в смешанных стратегиях, предварительно убедившись, что решения в чистых стратегиях нет, для игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 5 \\ -20 & 15 & 1 \\ 6 & -10 & 18 \end{pmatrix}$.

№41. Найти решение в смешанных стратегиях, предварительно убедившись, что решения в чистых стратегиях нет, для игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

№42. Найти решение в смешанных стратегиях, предварительно убедившись, что решения в чистых стратегиях нет, для игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 18 & -5 & 20 \\ 40 & 35 & -1 \\ 21 & 20 & 23 \end{pmatrix}$.

№43. Найти решение в смешанных стратегиях, предварительно убедившись, что решения в чистых стратегиях нет, для игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Игра против природы. Критерии Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

Задания для практических занятий.

№44. Частный предприниматель должен сделать закупку товара (зонтов и солнцезащитных очков) на сумму 70 тыс. руб. Прибыль предпринимателя зависит от выбранной им стратегии и преобладающей погоды и задана платежной матрицей:

Товар / Погода	солнце	дождь
зонты	-1	2
солнцезащитные очки	1	-2

На какую сумму предприниматель закупит каждого товара?

Ответ: Предприниматель потратит по 35 тыс. руб. на зонты и солнцезащитные очки.

№45. Фермер распределяет посевную площадь 70 га между двумя культурами (засухоустойчивой и влагоустойчивой). Прогноз на лето не определен (лето может быть либо засушливым, либо дождливым). Прибыль фермера зависит от выбранной им стратегии и преобладающей погоды летом и задана платежной матрицей:

Культура / Лето	засушливое	дождливое
засухоустойчивая	1	-3
влагоустойчивая	-2	1

Найти распределение площади между культурами, оптимальное для фермера.

Ответ: Оптимальным для фермера будет занять 30 га посевной площади под засухоустойчивую культуру и 40 га – под влагоустойчивую.

Задания для самостоятельного решения.

№46. Предприятие может выпускать три вида продукции (A_1, A_2, A_3), получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из четырех состояний (B_1, B_2, B_3, B_4). Дана матрица, элементы которой характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i-й продукции с j-м состоянием спроса.

B \ A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	3	6	8
A_2	9	10	4	2
A_3	7	7	5	4

Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределенным.

№47. Найти наилучшую стратегию по критерию Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица для игры, заданной платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 & -8 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 5 & -4 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 10 & 0 & 2 \\ 9 & -9 & 7 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

№48. Найти наилучшую стратегию по критерию Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица для игры, заданной платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 10 & 6 & 0 & -4 \\ 12 & 6 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Равновесие Нэша.

Задания для практических занятий.

№49. Найти равновесие по Нэшу либо в чистых, либо в смешанных стратегиях в биматричной игре: $\begin{pmatrix} 0;0 & -5;5 \\ 5;-5 & -100;-100 \end{pmatrix}$.

Ответ: $(A_2;B_1)$ и $(A_1;B_2)$ - чистые стратегии; $(0{,}95;0{,}05)$ - смешанные стратегии игрока А; $(0{,}95;0{,}05)$ - смешанные стратегии игрока В.

№50. Найти равновесие по Нэшу либо в чистых, либо в смешанных стратегиях в биматричной игре: $\begin{pmatrix} 0;0 & 0;5 \\ 5;0 & -10;-10 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ - смешанные стратегии игрока А; $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ - смешанные стратегии игрока В.

№51. Найти равновесие по Нэшу либо в чистых, либо в смешанных стратегиях в биматричной игре: $\begin{pmatrix} 1;-1 & -1;1 \\ -1;1 & 1;-1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $(0{,}5;0{,}5)$ - смешанные стратегии игрока А; $(0{,}5;0{,}5)$ - смешанные стратегии игрока В.

№52. Найти равновесие по Нэшу либо в чистых, либо в смешанных стратегиях в биматричной игре: $\begin{pmatrix} 2;1 & 0{,}5;0{,}5 \\ 0;0 & 1;2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $(A_1;B_1)$ и $(A_2;B_2)$ - чистые стратегии; $\left(\frac{4}{5};\frac{1}{5}\right)$ - смешанные стратегии игрока А; $\left(\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right)$ - смешанные стратегии игрока В.

№53. Найти равновесие по Нэшу либо в чистых, либо в смешанных стратегиях в биматричной игре: $\begin{pmatrix} -5;-5 & 10;20 \\ 20;10 & -5;-5 \end{pmatrix}$.

Ответ: $(A_2;B_1)$ и $(A_1;B_2)$ - чистые стратегии; $\left(\frac{3}{8};\frac{5}{8}\right)$ - смешанные стратегии игрока А; $\left(\frac{3}{8};\frac{5}{8}\right)$ - смешанные стратегии игрока В.

Задания для самостоятельного решения.

№54. Найти равновесие по Нэшу либо в чистых, либо в смешанных стратегиях в биматричной игре: $\begin{pmatrix} 5;5 & 10;2 \\ 2;10 & 7;7 \end{pmatrix}$.

№55. Найти равновесие по Нэшу либо в чистых, либо в смешанных стратегиях в биматричной игре: $\begin{pmatrix} 100;100 & 0;0 \\ 0;0 & 0;0 \end{pmatrix}$.

№56. Найти равновесие по Нэшу либо в чистых, либо в смешанных стратегиях в биматричной игре: $\begin{pmatrix} -5;-5 & -1;10 \\ -10;-1 & -2;-2 \end{pmatrix}$.

№57. Найти равновесие по Нэшу либо в чистых, либо в смешанных стратегиях в биматричной игре: $\begin{pmatrix} 100;80 & 80;100 \\ 20;0 & 10;20 \end{pmatrix}$.

№58. Найти равновесие по Нэшу в чистых, или в смешанных стратегиях в биматричной игре: $\begin{pmatrix} 0;3 & 3;0 \\ 5;1 & 1;5 \end{pmatrix}$.

№59. Найти равновесие по Нэшу либо в чистых, либо в смешанных стратегиях в биматричной игре: $\begin{pmatrix} 10;10 & 100;-50 \\ -50;100 & 50;50 \end{pmatrix}$.

Кооперативные решения

№60. В некотором районе имеется три предприятия, каждое из которых нуждается в проводке теплоцентралей. Предприятия могут провести теплоцентрали отдельно друг от друга, а могут объединиться в группы – коалиции. Если предприятие i=1.2.3 прокладывает централь самостоятельно, то затраты составят 100, 200, 300 единиц соответственно. Если 1-е и 2- предприятие объединяться, то их общие затраты составят 250 единиц. Если 1-е и 3-е объединяться, то затраты составят 350 единиц. Если 2-е и 3-е объединятся, то затраты составят 460 единиц. Если все три предприятия объединяться, то затраты составят 580 единиц. Найти все решения, которые могут принять предприятия как рациональные субъекты.

*Решени*е.

Возможны следующие коалиции:

$\{1\}$ – первое предприятие;	$\{1, 2\}$ – первое и второе;	$\{1, 2, 3\}$ – первое, второе и третье
$\{2\}$ – второе предприятие;	$\{1, 3\}$ – первое и третье;	
$\{3\}$ – третье предприятие;	$\{2, 3\}$ – второе и третье;	

Обозначим $v(K)$ – суммарные затраты на проводку теплоцентралей коалицией *K*. получим, что $v(\{i\})$ – затраты на проведение теплоцентралей i-м предприятием $(i = 1, 2, 3)$, если оно действует в одиночку.

Рассмотрим условия, при которых первому и второму предприятию выгодно объединиться в коалицию $\{1, 2\}$. Общие затраты $v(\{1, 2\})$=250 будут поделены между первым и вторым предприятиями (необязательно поровну). Обозначим x_1 – затраты первого предприятия, x_2 – затраты второго предприятия. Очевидно, что

$$x_1 + x_2 = v(\{1, 2\}) \qquad (3.1)$$

Каждое предприятие сопоставляет свои затраты x_i с теми затратами, которые оно понесло, если бы не вступило в коалицию. Для обоих предприятий условием вступления каждого из них в коалицию будет выполнение следующих неравенств:

$$\begin{cases} x_1 \le v(\{1\}), \\ x_2 \le v(\{2\}). \end{cases} \qquad (3.2)$$

Необходимым условием для этого служит неравенство:

$$v(\{1, 2\}) \le (v\{1\} + v\{2\}) \qquad (3.3)$$

Неравенство выполняется, т.к. 250<100+200.

Так же справедливы неравенства 350<100+300, 460<200+300, поэтому могут возникнуть все коалиции $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$.

При каких условиях возможна коалиция, состоящая из всех трех предприятий?

Пусть x_1', x_2', x_3' – затраты каждого из предприятия в коалиции $\{1, 2, 3\}$ т.е.

$$x_1' + x_2' + x_3' = v(\{1, 2, 3\}) \qquad (3.4)$$

Условием, при котором коалиции $\{1, 2\}$ будет выгодно принять к себе 3-е предприятие, и при этом вхождение в коалицию будет выгодно 3-му предприятию, будет система неравенств

$$v(\{1, 2\}) \ge x_1' + x_2' \qquad (3.5)$$

$$v(\{3\}) \ge x_3' \qquad (3.6)$$

Из системы следует, что $v(\{1, 2\})+ 300 \ge v(\{1, 2, 3\})$. Это неравенство не выполняется, т.к. 250+300<580. Аналогично можно сравнить коалицию $\{1, 2, 3\}$ с двумя другими попарными коалициями. Следовательно, коалиция $\{1, 2, 3\}$ менее выгодна участникам, чем любые попарные коалиции.

Ответ. Оптимальными решениями будут коалиции, объединяющие различные пары предприятий.

Теория игр. Кооперативное решение.

Условия задачи.

Экономика состоит из двух агентов, совершающих добровольный обмен на наборах из двух товаров А и В. Функции полезности 1 и 2 агентов заданы уравнениями

$u_i = k_i\,(x_i)^{\alpha}\,(y_i)^{1-\alpha}$, $i = 1,2$, где x_i - количество товара А у агента i, y_i - количество товара В у агента i. Суммарные количества товаров А и В ограничены: $x_1 + x_2 = a$, $y_1 + y_2 = b$, где a, b - положительные константы. Первоначально 1 агент владеет товарами А и В в количествах x_0, y_0 соответственно, причем $x_0 \le a, y_0 \le b$. Агент 2 владеет оставшимися количествами товаров. Агенты вступают в добровольный обмен, увеличивающий их полезности. Решениями называются наборы товаров, поступающих в распоряжения каждого из агентов после обмена. Предполагается, что трансакционные издержки равны нулю, информация агентов совершенна.

Задание.

1. В модели Эджворта найти контрактную кривую, точку угрозы, переговорное множество;
2. В системе координат u_1, u_2 найти уравнение, связывающее полезности агентов для решений, оптимальных по Парето;
3. В той же системе координат построить кривую оптимальных по Парето решений, найти точку угрозы, переговорное множество;
4. Найти арбитражное решение (решение Нэша);
5. Найти количества товаров А и В, которыми должны владеть агенты согласно арбитражному решению;

6. Показать, что для любого решения, не лежащего на контрактной кривой, найдется другое решение, которое эффективнее по Парето, чем первое.

Указание. Значения констант для каждого из 10 вариантов приведены в следующей таблице в соответствующей строке.

№ варианта	α	a	b	k_1	k_2	x_0	y_0
1	1/3	8	27	2	3	0	27
2	2/3	64	27	1	2	27	8
3	1/2	25	100	2	1	16	36
4	1/4	16	81	3	4	16	0
5	1/2	100	169	1	2	64	25
6	1/3	27	8	3	2	27	0
7	2/3	8	64	2	3	1	27
8	12	00	25	4	3	64	9
9	1/4	81	256	1	1	16	225
10	1/2	169	25	3	4	144	9

Творческая часть задания. Ответьте на вопросы:

1. Пусть $1^{й}$ агент имеет преимущество в переговорной силе, т.е. может диктовать свои условия. Каким в этом случае будет решение игры?
2. Чему при этом будут равны полезности агентов?
3. Почему в этом случае $2^{му}$ агенту выгоднее принять условия, которые диктует 1 агент, чем оставаться в начальном положении?
4. Почему агент, имеющий преимущество в переговорной силе, не может захватить все ресурсы в условиях добровольного обмена?
5. Влияет ли соотношение переговорных сил агентов на арбитражное решение?

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Паша и Витя пришли на новогоднюю елку. Дед Мороз и Снегурочка предлагают детям сыграть в беспроигрышную лотерею на конфеты. Лотерея разыгрывается по следующим правилам. Дети берут по одному лотерейному билету и должны написать на нем либо «Дед Мороз» (ДМ), либо «Снегурочка» (СН). При этом они не должны показывать или рассказывать друг другу, что они написали. Затем они отдают Деду Морозу билеты и получают конфеты в зависимости от того, что написано на билетах. В ячейках следующей таблицы находятся пары чисел, первая из которых — число конфет, которые получает Паша, вторая — число конфет, которые получает Витя, в зависимости от того, что они написали на карточках.

Пусть полезность каждого из мальчиков совпадает с числом конфет, которое он получает. Решите игру, пользуясь логикой примера 1.1.

1.2. Найдите все эффективные по Парето профили стратегий в игре задания

1.3. Пусть в игре из задания 1.1 полезность Паши все еще измеряется числом конфет, которые он получает, а полезность Вити — суммарным числом конфет, которые получают оба мальчика (Витя — альтруист). Решите получившуюся игру, пользуясь логикой примера 1.1.

1.4. Предположим, что в задании 1.1 Паша перед игрой сказал Вите: «Если я напишу на карточке ДМ, то отдам тебе три своих конфеты». При этом известно, что Паша — очень честный мальчик и никогда не нарушает своих обещаний. Решите получившуюся игру, пользуясь логикой примера 1.1. Сравните полученное каждым из мальчиков число конфет с решением задания 1.1.

1.5. Пусть есть N голодных львов и одна антилопа. Антилопу имеет право съесть только лев-вожак (больше никто). Однако если вожак съест антилопу, то он заснет. Тогда его сможет съесть следующий по рангу лев после вожака (опять только он). Тот тоже заснет, если покушает. И его также может съесть следующий. И так далее для львов со все более низким рангом. Пусть львы предпочитают быть живыми прежде всего, но желательно также сытыми. Решите игру обратной индукцией

(см. пример 1.4).

(3; 5) (7; 4)

(1; 2) (5; 3)

Индивидуальные задания для самостоятельной работы:

1) *Задание 1*: решение игры с заданной матрицей платежей

1. Изучение теории.
2. Определение по заданной матрице платежей нижней и верхней цены игры. Существует ли в игре равновесие в чистых стратегиях?
3. Сведение задачи теории матричных игр к задаче линейного программирования (ЛП)
4. Решение задачи ЛП с помощью пакета MS Excel (определение цены игры и оптимальной стратегии для каждого из игроков).

Варианты заданий 1

Задача 1

	B1	B2	B3	B4
A1	8	6	2	8
A2	8	9	4	5
A3	7	5	3	5

Задача 2

	B1	B2	B3	B4
A1	4	-4	-5	6
A2	-3	-4	-9	-2
A3	6	7	-8	-9
A4	7	3	-9	5

Задача 3

	B1	B2	B3	B4
A1	1	9	6	0
A2	-2	3	8	4
A3	-5	-2	10	-3
A4	7	4	-2	-5

Задача 4

	B1	B2	B3	B4
A1	-1	9	6	8
A2	-2	10	4	6
A3	5	3	0	7
A4	7	-2	8	4

Задача 5

	B1	B2	B3	B4
A1	0,8	0,6	0,2	-0,8
A2	-0,8	0,9	-0,4	0,5
A3	1,7	0,5	0,3	0,6

Задача 6

	B1	B2	B3
A1	3	6	1
A2	5	2	3

A3	2	2	-5

Задача 7

	B1	B2	B3	B4
A1	3	7	1	3
A2	4	8	0	-6
A3	6	-9	-2	4

Задача 8

	B1	B2	B3	B4
A1	10	40	12	9
A2	17	16	13	14
A3	23	8	10	25

Задача 9

	B1	B2	B3	B4
A1	-2	1	9	-2
A2	-2	5	4	6
A3	3	2	0	0
A4	7	-2	8	4

Задача 10

	B1	B2	B3	B4
A1	-3	2	9	6
A2	-2	5	4	6
A3	5	3	1	-5
A4	8	-2	8	4

Задача 11

	B1	B2	B3	B4

A1	-8	6	0	7
A2	3	-1	4	4
A3	5	4	3	4

Литература

1. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. – М.: Наука. 2019

2. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: "Наука", 2018.

3. Горбунов В.К Математическая модель потребительского спроса.Теория и прикладной потенциал. М.: Экономика, 2014.- 174с.

4. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр – М.: "Наука", 2011.

5. Жуковский В.И. Кооперативные игры и их приложения./Под ред. В.С. Молоствова. – М.: Эдиториал УРСС, 2017.

6. Замков О.О. и др. Математические методы в экономике :Учебник.- М.: Изд-во «Дело и сервис»,2014 .-368С.

7. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Издательство "ДИС", 2018. – 368 с.

8. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2012.

9. Количественные методы в экономических исследованиях: Учебник для вузов /Под ред. Ш.В.Грвчевой, М.Н. фадеевой, Ю.Н. Черёмных.- М.: ЮНИТИ –ДИАНА,2014.-791с.

10. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заля. Вся высшая математика Теория вероятностей. Математическая статистика. 2014.

11. Мулен. Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир., 2015.

12. Нейман, Джон фон, Моргенштерн, Оскар Теория игр и экономическое поведение. – М.: "Наука"., 2018.

13. Оуэн.Г. Теория игр. – М.: Мир, 2019.

14. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. Учебное пособие. – М.: Книжный дом "Университет", Высшая школа, 2012. – 288 с.

15. Росленский В.З. Количественный анализ в моделях экономики. Лекции для студентов. -М.: Эконом.факуль. МГУ, ТЕИС,2002.-113 2с.

16. Теория игр. Том(часть) 5.: Учебник - 3-е изд.,исправл. М.: ЛКИ, 2017. – 296с.

17. Федосеев В.В., Гармош А. и др. Экономико-математические методы прикладные модели: Учебное пособие для вузов.- М.: ЮНИТИ,2012.- 391с.

18. Шапкин А.С., Шапкин В.А. Теория риска и моделирование рисковых ситуаций: Учебник. – М.: Издательско-торговая корпорация "Дашков и К^0", 2017. – 880 с.

19. Эконометрика. Учебник \ Под.ред И.И. Елисеевой.- М.: Финансы и статистика,2014.-344с.

20. www.cemi.rssi.ru

21. www.economics.com