

FRICITION IN ENGINEERING

ISBN: 978-93-90653-26-7

Authored by
Khalilov Z.Sh.
Tojiboev B.T.
Umarov B.T

Published by
Novateur Publication
466, Sadashiv Peth, M.S.India-411030



**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

ФЕРГАНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА: ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

ТРЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

МОНОГРАФИЯ

Фергана-2021

В данной монографии рассмотрены теоретические и практические вопросы трения скольжения, качения, верчения, покоя, равновесие при наличии трения скольжения, вопросы проскальзывания при трении качения, трение нити о цилиндрическую поверхность, относительное скольжение поверхности катка, качение абсолютно жесткого катка, равновесие тела на шероховатой поверхности, угол и конус трения, скачки при трении, закона Амонтона-Кулона, Гука, Морена и т.д.

Монография рассмотрена и одобрена на заседании кафедры «Прикладная механика», рекомендована к опубликованию в открытой печати и представлена на рассмотрение методической комиссии Механико-машиностроительного факультета.

Монография рассмотрена и одобрена на заседании методической комиссии Механико-машиностроительного факультета, рекомендована к опубликованию в открытой печати и представлена на рассмотрение методического совета Фер ПИ.

Подготовили:

Халилов Ш.З.

Халилов З.Ш.

Тожибоев Б.Т.

Умаров Б.Т

Рецензенты:

д.т.н. проф. Набиев Т.С академик Академии наук Российской Федерации, проф. Фер ПИ

д.т.н. Эргашев С.Ф проф. Фер ПИ

Введение

В машиностроении различают следующие виды трения: внешнее, внутреннее, сухое (трение движения, трение качения, трение покоя, трение скольжения), жидкостное трение, магнитное трение, поверхностное трение, статическое трение, вязкое трение и граничное трение.

Трение внешнее. Механическое сопротивление, возникающее в плоскости касаний двух соприкасающихся прижатых друг к другу тел при их относительном перемещении. Сила сопротивления, направленная противоположно относительно перемещения тела, называется **силой трения**, действующей на это тело. На величину трения влияют: нагрузка, скорость перемещения тел, шероховатость их поверхностей, температура, наличие смазки. Наибольшее значение сила трения имеет в момент «трогания» тела с места. Различают трение скольжения и трение качения. Сила трения качения обычно значительно меньше силы трения скольжения. Благодаря трению происходит движение паровоза, автомобиля и т.д. Трение используется в ремённых и фрикционных передачах, в тормозах и т.п., но трение вызывает нагревание и износ различных частей механизмов и машин. Вредное влияние трения уменьшают смазкой, применяют шариковые и роликовые подшипники, заменяя трение скольжения и трения качения.

Трение

При движении или стремлении двигать одно тело по поверхности другого в касательной плоскости поверхностей соприкосновения возникает сила трения скольжения.

Если одно тело, например цилиндрический каток, катить или стремиться катить по поверхности другого тела, кроме силы трения скольжения из-за деформации поверхностей тел дополнительно возникает пара сил, препятствующая качению катка

а) Трение скольжения

Все поверхности тел в той или иной степени шероховаты и все тела деформируемы.

В связи с этим и сила реакции \vec{R} шероховатой поверхности при равновесии тела зависит от активных сил не только по числовой величине, но и по направлению (рис. 1.1).

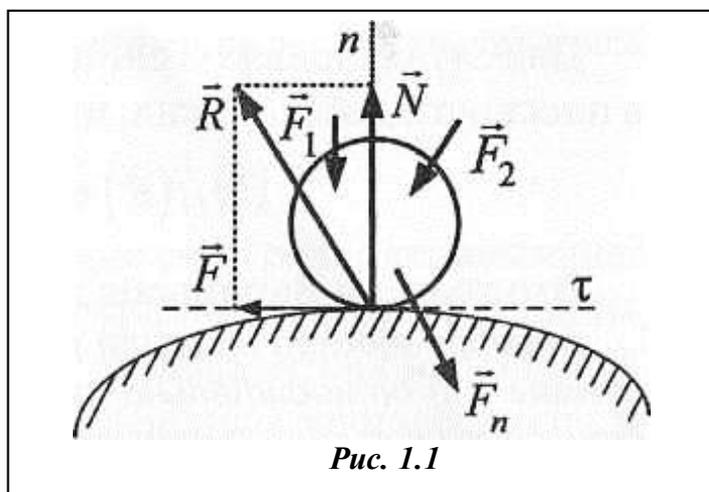


Рис. 1.1

Если силу реакции \vec{R} шероховатой поверхности разложить на составляющие, одна из

которых \vec{N} направлена по общей нормали к поверхности соприкосновения, а другая \vec{F} находится в касательной плоскости к этой поверхности, то составляющая \vec{F} силы реакции является *силой трения скольжения*, а составляющая \vec{N} *нормальной реакцией*.

В теоретической механике обычно рассматривается только *сухое трение* между поверхностями тел, то есть такое трение, когда между ними нет смазывающего вещества. Для сухого трения надо различать трение скольжения *при покое* и *равновесии* тела и трение скольжения *при движении* одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью.

При покое сила трения зависит только от активных сил. При выбранном направлении касательной в точке соприкосновения поверхностей тел сила трения вычисляется по формуле

$$F = \sum_i F_{it}.$$

Аналогично, при выбранном направлении нормальная реакция выражается через заданные силы

$$-N = \sum_i F_{in}.$$

В 1781 г. Кулон установил основные законы для сухого трения скольжения при покое.

б) Законы Кулона

1. Сила трения скольжения находится в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей тел и направлена в сторону, противоположную направлению возможного скольжения тела под действием активных сил. Сила трения зависит от активных сил, и ее модуль заключен между нулем и максимальным значением, которое достигается в момент выхода тела из положения равновесия, то есть

$$0 \leq F \leq F_{\max}.$$

2. Максимальная сила трения скольжения не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей.

3. Максимальная сила трения скольжения пропорциональна нормальному давлению (нормальной реакции), то есть

$$F_{\max} = fN,$$

где безразмерный коэффициент f называют **коэффициентом трения скольжения**; он не зависит от нормального давления.

4. Коэффициент трения скольжения зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей, то есть от величины и характера шероховатости, влажности, температуры и других условий. Коэффициент трения скольжения устанавливается экспериментально.

Закон Кулона о предельной силе трения справедлив и при скольжении одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью. При этом коэффициент трения скольжения зависит от относительной скорости скольжения. Для большинства материалов он уменьшается с увеличением относительной скорости скольжения, но для некоторых

материалов, наоборот, увеличивается (трение кожи о металл).

В приближенных технических расчетах обычно считают, что коэффициент трения скольжения не зависит от относительной скорости скольжения.

В отличие от сухого трения, трение при наличии смазывающего слоя между поверхностями определяется распределением относительной скорости скольжения в этом слое. В этом случае трение происходит не между поверхностями тел, а между слоями смазывающего вещества. Теория трения в смазывающем слое жидкости рассматривается в гидродинамике.

в) Угол и конус трения

Многие задачи на равновесие тела на шероховатой поверхности, то есть при наличии силы трения, удобно решать геометрически. Для этой цели введем понятие угла и конуса трения.

Пусть твердое тело под действием активных сил находится на шероховатой поверхности в предельном состоянии равновесия, то есть в таком состоянии, когда сила трения достигает своего наибольшего значения при данном значении нормальной реакции (рис. 2). В этом случае полная реакция шероховатой поверхности \vec{R} отклонена от нормали общей касательной плоскости трущихся поверхностей на наибольший угол.

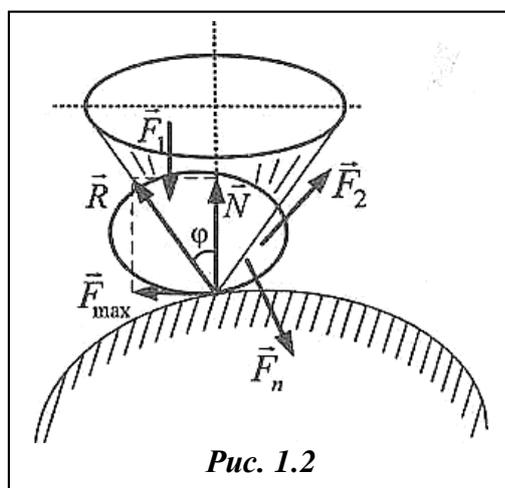
Этот наибольший угол φ между полной реакцией, построенной на наибольшей силе трения при данной нормальной реакции, и направлением нормальной реакции называют *углом трения*.

Угол трения φ зависит от коэффициента трения. Из рис. 1.2 следует

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\max}}{N}.$$

Но по третьему закону Кулона

$$F_{\max} = fN,$$



следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi = f,$$

то есть тангенс угла трения равен коэффициенту трения.

Конусом трения называют конус, описанный полной реакцией, построенной на максимальной силе трения, вокруг направления нормальной реакции.

Если коэффициент трения во всех направлениях одинаков, то конус трения круговой. Если же коэффициент трения в различных направлениях не одинаков, то конус трения не круговой, например, в случае, когда свойства соприкасающихся поверхностей различны (вследствие определенного направления волокон или в зависимости от направления обработки поверхности тел).

г) Трение качения

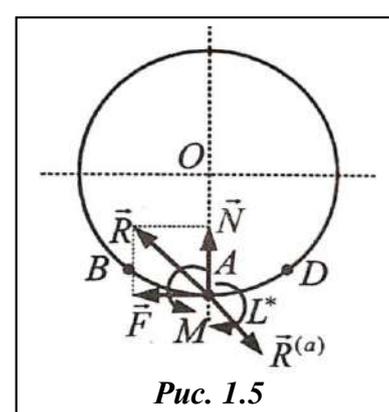
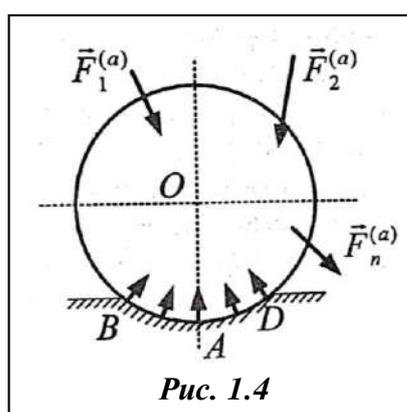
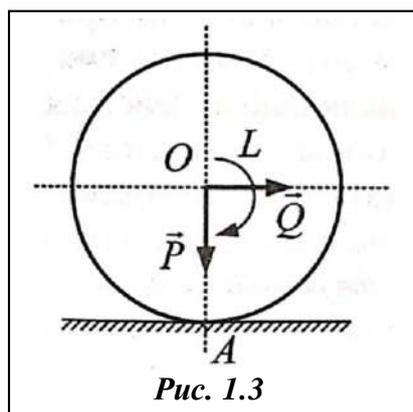
Если рассматриваемое тело имеет форму катка и под действием приложенных активных сил может катиться по поверхности другого тела, то из-за деформации поверхностей этих тел в месте соприкосновения могут возникнуть силы реакции, препятствующие качению. Примерами таких катков являются различные колеса, как, например, у электровозов, вагонов, автомашин, шарики и ролики в шариковых и роликовых подшипниках и т.п.

Пусть цилиндрический каток катится по горизонтальной плоскости под действием активных сил. Соприкосновение катка с плоскостью из-за деформации фактически происходит не вдоль одной образующей, как в случае абсолютно твердых тел, а по некоторой площадке. Если активные силы приложены симметрично относительно среднего сечения катка, то есть вызывают одинаковые деформации вдоль всей его образующей, то можно изучать только одно среднее сечение катка.

Активные силы, действующие на катки в виде колес (рис. 1.3), кроме силы тяжести \vec{P} обычно состоят из силы \vec{Q} , приложенной к центру колеса параллельно общей касательной в точке A , и пары сил с моментом L , стремящейся катить колесо, называемое в этом случае ведомо-ведущим. Если $L=0$ а $\vec{Q} \neq 0$, колесо называют ведомым, и если $L \neq 0$, а $\vec{Q} = 0$, то ведущим. Ведомо-ведущими являются колеса локомотива, идущего вторым в составе поезда.

Если активные силы, действующие на колесо, привести к точке A соприкосновения катка с плоскостью, у которых нет деформации, то в общем случае получим силу и пару сил, стремящиеся заставить каток скользить и катиться. Следует различать **чистое качение**, когда точка соприкосновения A катка не скользит по неподвижной плоскости, и качение со скольжением, когда наряду с вращением катка есть и скольжение, то есть точка A катка движется по плоскости. При чистом скольжении, каток движется по плоскости, не имея вращения.

Соприкосновение среднего сечения колеса с неподвижной плоскостью из-за деформации колеса и плоскости происходит по некоторой линии BD . По этой линии на колесо действуют распределенные силы реакции (рис. 1.4).



Если привести распределенные силы к точке A , то в этой точке получим главный вектор \vec{R} этих распределенных сил с составляющими \vec{N} (нормальная реакция) и \vec{F} (сила трения скольжения), а также пару сил с моментом M (рис. 1.5).

Приведем активные силы $\left(F_1^{(a)}, F_2^{(a)}, \dots, F_n^{(a)} \right)$ в общем случае к точке A . В этой точке получим главный вектор этих сил $R^{(a)}$ и пару сил, момент которой равен главному моменту L^* (рис. 1.5).

При равновесии катка, то есть когда каток не катится и не скользит по плоскости, активные силы уравниваются силами реакций связи и, следовательно,

$$-R = R^{(a)} = \sum_{i=1}^n F_i^{(a)}; -M = L^* = \sum_i M_A \left(F_i^{(a)} \right).$$

Изменим активные силы, приложенные к катку так, чтобы увеличивался момент L^* пары активных сил, стремящейся катить каток. Пока каток находится в равновесии, увеличивается и равный ему по числовой величине, но противоположный по направлению момент M пары сил, препятствующий качению катка и возникающий от действия на каток неподвижной плоскости. Наибольшее значение M достигается в момент начала качения катка по плоскости.

Установлены следующие приближенные законы для наибольшего момента пары сил, препятствующей качению.

1. Наибольший момент пары сил, препятствующий качению, в широких пределах не зависит от радиуса катка.

2. Предельное значение момента M_{max} пропорционально нормальному давлению, а следовательно, и равной ему нормальной реакции \vec{N} :

$$M_{max} = \delta N.$$

Коэффициент пропорциональности δ называют **коэффициентом трения качения при покое**. Он имеет размерность длины.

3. Коэффициент трения качения δ зависит от материала катка, плоскости и физического состояния их поверхностей. Коэффициент трения при качении в первом приближении можно считать не зависящим от угловой скорости качения катка и его скорости скольжения по плоскости. Для случая качения вагонного колеса по стальному рельсу коэффициент трения качения $\delta \approx 0,5 \text{ мм}$.

Законы трения качения, как и законы трения скольжения, справедливы для не очень больших нормальных давлений и не слишком легко деформирующихся материалов катка и плоскости.

Эти законы позволяют не рассматривать деформации катка и плоскости, считая их абсолютно твердыми телами, касающимися в одной точке. В этой точке соприкосновения кроме нормальной реакции и силы трения надо приложить еще и пару сил, препятствующую качению.

Для того чтобы каток не скользил, необходимо выполнение условия

$$\left| \vec{F} \right| < F_{\max} = fN.$$

Для того чтобы каток не катился, должно выполняться условие

$$\left| M \right| < M_{\max} = \delta N.$$

Решение задач на равновесие тел при наличии сил трения обычно вызывает затруднения. Это связано с тем, что сила трения является величиной неопределенной, для которой известно ее предельное значение fN .

Неудобство решения задач на равновесие тел при наличии сил трения состоит в том, что приходится оперировать с неравенствами. Задача сводится к решению обычной системы уравнений статики в тех случаях, когда силы трения достигают своих максимальных (предельных) значений. Однако область изменения искомой величины при равновесии установить на основании предельного значения этой величины не всегда представляется возможным. Поэтому, если рассматривается не предельное положение равновесия тела, можно составить для этого тела уравнения равновесия, в которых силы трения положить равными

$$F_i = k_i N_i (i = 1, 2, \dots),$$

где N_i — нормальная реакция; $0 \leq k_i \leq f_i$.

Разрешив систему уравнений относительно искомых величин, получим искомые величины как функции от параметров k_i . Области изменения искомых величин определяются в зависимости от изменения параметров.

2. Трение скольжения и качения

а) трение скольжения

Сопротивление, возникающее при скольжении одного тела по поверхности другого, называется *трением скольжения*.

Рассматривая равновесие несвободного твердого тела, предполагали, что в том случае, когда тело опирается на неподвижную поверхность в какой-нибудь точке A (рис. 2.1), реакция опорной поверхности направлена по нормали к этой поверхности. Это предположение не соответствует действительности: реакция R_A неподвижной поверхности образует с нормалью к этой поверхности некоторый угол φ , так что эту силу можно разложить на две составляющие: 1) силу N , направленную по нормали к опорной поверхности и называемую *нормальной реакцией*, и 2) силу F , лежащую в плоскости, касательной к опорной поверхности, и противодействующую скольжению тела по этой поверхности. Эта сила F называется *силой трения скольжения*.

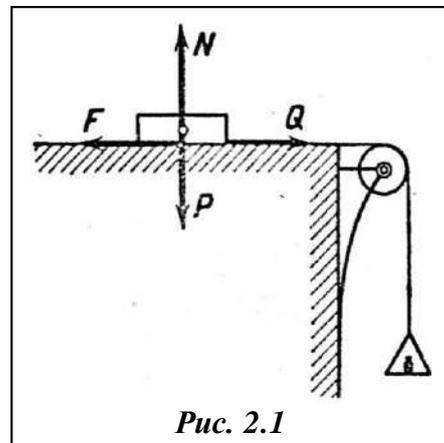


Рис. 2.1

Если соприкасающиеся тела достаточно тверды и хорошо отполированы, то сила F незначительна и ею можно пренебречь; считая тела абсолютно твердыми и абсолютно гладкими. Но при технических расчетах силу трения всегда приходится принимать во внимание.

Пусть на неподвижную горизонтальную плоскость положен брусок весом P . Приложим к этому бруску горизонтальную силу Q , что можно осуществить, привязав к бруску гибкую и тонкую веревку, перекинутую через блок, к концу которой подвешена чашка с гирями (рис. 2.2). Если бы реакция неподвижной плоскости сводилась только к нормальной силе N , то горизонтальная сила Q , как бы мала она ни была, оставаясь неуравновешенной, заставила бы брусок скользить по плоскости. Но в действительности брусок остается в покое до тех пор, пока сила Q не достигнет некоторой определенной величины. Это приводит к заключению, что, кроме нормальной реакции N , возникает еще сила F , противоположная силе Q и препятствующая скольжению бруска. Эта сила F и есть сила трения между бруском и опорной плоскостью.

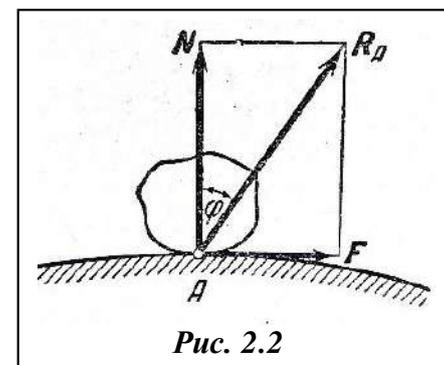


Рис. 2.2

Будем постепенно увеличивать силу Q . В случае когда брусок остается в равновесии, будем иметь:

$$N = P \text{ и } F = Q;$$

из последнего равенства видим, что с *увеличением силы Q возрастает и сила трения F* . Наконец, наступит такой момент, когда брусок будет находиться, так сказать, на грани между покоем и движением, или, иначе, на пороге скольжения. Дальнейшее увеличение силы Q , хотя бы самое малое, вызовет уже скольжение его по плоскости. В этот момент сила F достигает максимального значения и при дальнейшем увеличении силы Q она уже не сможет уравновесить эту силу. Сила трения, проявляющаяся при покое тела, называется *силой трения в покое* или *силой статического трения*; Сила трения, возникающая при скольжении тела, называется *силой трения в движении*. Из рассмотренного опыта мы видим, что модуль силы

трения в покое может иметь *любое значение*, заключающееся между нулем и некоторым максимальным значением F_{max} , различным в зависимости от различных условий опыта. Установить факторы, от которых зависит величина F_{max} , и выяснить характер этой зависимости возможно только на основании опытов.

Исследованием явления трения впервые занимался еще Леонардо да Винчи (1452—1519). В конце XVIII в. многочисленные опыты были проведены известным французским физиком Кулоном. Ввиду того важного значения, которое имеет явление трения в технической практике, экспериментальное изучение этого явления продолжалось и после Кулона и в широких размерах проводится и в настоящее время.

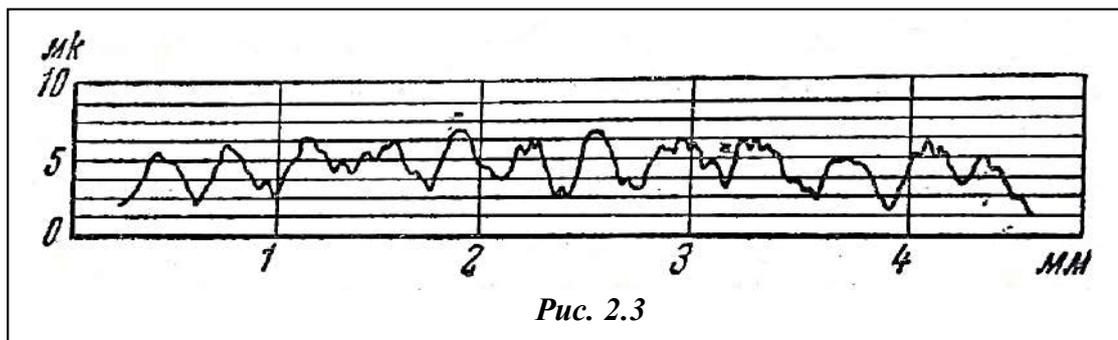


Рис. 2.3

Теоретические и экспериментальные работы многих ученых значительно продвинули вперед современное учение о трении. Однако нужно заметить, что эта трудная физико-механическая проблема и до сих пор еще не вполне разрешена.

Возникновение силы трения скольжения объясняется прежде всего тем, что поверхности трущихся тел не являются абсолютно гладкими: как бы хорошо ни была отшлифована поверхность тела, на ней всегда имеются выступы и углубления, которые вследствие их малости не могут быть, конечно, обнаружены простым глазом. На рис. 2.3 изображена кривая, показывающая в увеличенном виде микроструктуру поверхности тела (профилограмма). Профилограмма дает наглядное представление о степени шероховатости данной поверхности. Для получения таких профилограмм в настоящее время пользуются специальными приборами (профилографы). Для того чтобы заставить одно тело скользить по другому, необходимо преодолеть возникающее при этом сопротивление микроскопических выступов (неровностей), имеющих на соприкасающихся поверхностях этих тел. Кроме того, при этом приходится преодолевать еще силы молекулярного взаимодействия между частицами поверхностных слоев соприкасающихся тел. Таким образом, возникновение трения скольжения объясняется двумя причинами:

1) шероховатостью поверхностей трущихся тел и 2) проявлением сил молекулярного взаимодействия этих тел.

Установлено, что максимальная величина силы трения в покое прямо пропорциональна нормальному давлению одного тела на другое, или, что то же, нормальной реакции.

Возьмем два бруска, из которых один вдвое тяжелее другого, то при прочих равных условиях максимальное значение силы трения для этого бруска оказывается вдвое большим.

Если обозначим через F_{max} максимальную величину силы статического трения и через N — нормальную реакцию опорной поверхности, то будем иметь:

$$F_{max} = fN, \quad (2.1)$$

где f — коэффициент пропорциональности, называемый *статическим коэффициентом*

трения скольжения. Величина этого коэффициента зависит от материала трущихся тел, а также от состояния их поверхностей (степени шероховатости, влажности, температуры). Значения коэффициентов трения для разных материалов и при разном состоянии трущихся поверхностей, можно найти в таблицах. Из равенства

$$f = \frac{f_{\max}}{N}$$

следует, что коэффициент трения скольжения есть число отвлеченное.

Следует иметь в виду, что формула (2.1) является лишь приближенной формулой, далеко не отражающей в полной мере сложного физического явления трения твердых тел. Однако ввиду простоты этой формулы и ее достаточной точности во многих случаях технической практики эта формула имеет широкое применение и в настоящее время. Применяя эту формулу при расчетах в условиях производственной практики, нужно возможно точнее определить значение коэффициента трения. Значение коэффициента трения зависит также и от удельного давления, т. е. от величины нормального давления, приходящегося на единицу площади контакта трущихся тел.

Приведем значения статического коэффициента трения для некоторых тел:

Бронза по чугуну	$f = 0,16$
» » железу.....	$f = 0,19$
Сталь » стали	$f = 0,15$
Металл » дубу	$f = 0,62$
Дуб по дубу (волокна параллельны)	$f = 0,62$
» » » (» перпендикулярны)	$f = 0,54$
Кожаный ремень по дубовому шкиву	$f = 0,47$
» » » чугуну.....	$f = 0,28$
Камень или кирпич по кирпичу	$f = 0,50 - 0,73$
» по железу.....	$f = 0,42 - 0,49$
» » дереву.....	$f = 0,46 - 0,60$
Сталь » льду.....	$f = 0,027$

Трение в движении

1) Сила трения в движении направлена противоположно скорости одного из трущихся тел относительно другого.

2) Сила трения в движении пропорциональна нормальному давлению одного из трущихся тел на другое, т. е. $F' = fN$, где f' есть коэффициент трения скольжения в движении.

3) Коэффициент трения в движении несколько меньше статического коэффициента трения и зависит от материала трущихся тел и состояния их поверхностей.

4) Коэффициент трения в движении зависит от относительной скорости трущихся тел. В большинстве случаев с увеличением скорости этот коэффициент убывает, стремясь к некоторому постоянному значению. Однако наблюдается и обратное явление: при трении, например, кожи о металл (в ременных передачах) установлено, что коэффициент трения возрастает с увеличением скорости. В некоторых случаях значение коэффициента трения в движении проходит через максимум, т. е. сначала при возрастании относительной скорости от нуля коэффициент трения возрастает, при некотором значении скорости он имеет наибольшее значение и затем при дальнейшем увеличении скорости начинает убывать.

Разными исследователями предложены многочисленные формулы, устанавливающие

зависимость коэффициента трения в движении от относительной скорости трущихся тел; так, например, при торможении железнодорожных вагонов для определения коэффициента трения скольжения между чугунными тормозными колодками и стальными бандажами нередко пользуются следующей формулой:

$$f = \frac{1+0,0112v}{1+0,06v} f_0$$

где v — скорость скольжения в километрах в час, $f'_0 = 0,45$ для сухих поверхностей и $f'_0 = 0,25$ для влажных поверхностей.

При изучении трения твердых тел, кроме коэффициента трения, важную роль играет также угол трения. Пусть твердое тело, находящееся в равновесии, опирается на неподвижную поверхность (рис. 2.4) и пусть R_A есть равнодействующая сил N и F_{max} , т. е. полная реакция опорной поверхности в точке A . Угол $\varphi_{тр}$ между силой R_A и нормалью к опорной поверхности называется *углом трения*.

Из прямоугольного треугольника имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi_{тр} = \frac{F_{max}}{N} = \frac{fN}{N} = f,$$

т. е. *тангенс угла трения равен коэффициенту трения*.

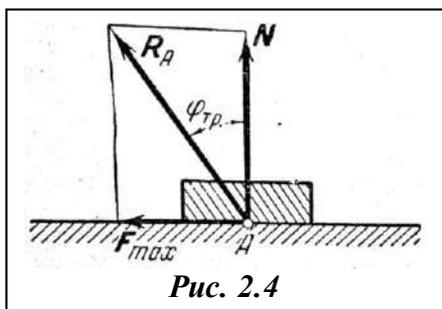


Рис. 2.4

Геометрическое место прямых линий, проведенных из точки A под углом $\varphi_{тр}$ к нормали n опорной поверхности в точке A , образует коническую поверхность, которая называется *конусом трения* (рис. 2.5). Если при движении тела по неподвижной плоскости в любом направлении коэффициент трения скольжения имеет одно и то же значение, то конус трения будет, очевидно, круглым конусом. В некоторых случаях при движении тела по неподвижной плоскости

в разных направлениях коэффициент трения скольжения имеет различные значения, например при скольжении по дереву вдоль волокон и поперек волокон. В этих случаях образующие конуса трения составляют с нормалью опорной поверхности различные углы, а потому конус трения не будет круглым конусом. Так как модуль F силы статического трения не может быть больше F_{max} то

$$F \leq fN.$$

Если обозначим через φ угол полной реакции R_A с нормалью к опорной поверхности в том случае, когда модуль силы статического трения не достиг еще максимального значения F_{max} (рис. 2.1), то

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{N} \leq \frac{fN}{N}$$

или

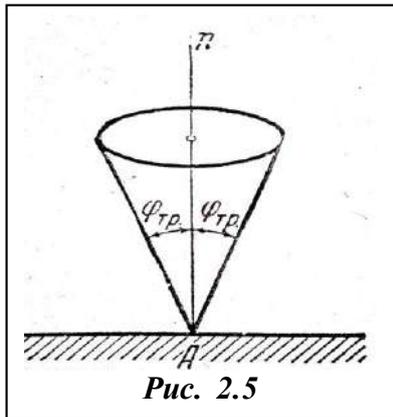


Рис. 2.5

$$\operatorname{tg} \varphi \leq f,$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi \leq \operatorname{tg} \varphi_{\text{тр}},$$

а потому

$$\varphi \leq \varphi_{\text{тр}}.$$

Отсюда следует, что *полная реакция опорной поверхности не может быть направлена по прямой, лежащей вне конуса трения*. Рассмотрим примеры решения задач статики при

наличии трения.

Пример 2.1. Плоскость OA может вращаться на шарнире O , так что ее можно установить под любым углом α к горизонту. На эту плоскость положено тело весом P (рис. 2.6). При каком угле α тело будет оставаться в равновесии?

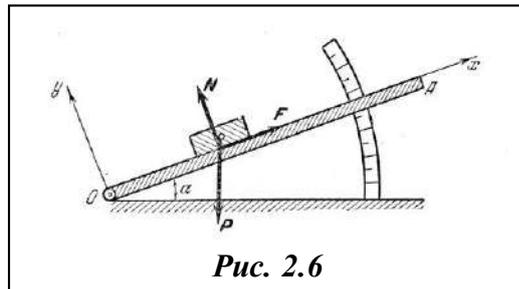


Рис. 2.6

Решение. Обозначим через N нормальную реакцию плоскости и через F силу трения. Проектируя все силы, действующие на тело (N , F и P), на направление OA (на ось x) и на направление, перпендикулярное к OA (на ось y), будем иметь при равновесии:

$$F - P \sin \alpha = 0 \quad \text{и} \quad N - P \cos \alpha = 0,$$

отсюда находим: $F = P \sin \alpha$, $N = P \cos \alpha$ и, следовательно,

$$\operatorname{tga} = \frac{F}{N}.$$

Наибольшее значение, которого может достигнуть сила трения в покое, есть

$$F_{\text{max}} = fN,$$

а потому

$$F \leq fN,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tga} \leq \frac{fN}{N}, \quad \text{или} \quad \operatorname{tga} \leq f;$$

но $f = \operatorname{tg} \varphi_{\text{ТР}}$, где $\varphi_{\text{ТР}}$ – угол трения, а потому

$$\operatorname{tg} a \leq \operatorname{tg} \varphi_{\text{ТР}} \text{ или } a \leq \varphi_{\text{ТР}},$$

т. е. тело будет оставаться в равновесии до тех пор, пока угол наклона плоскости не превышает угла трения.

Заметим, что при помощи прибора, изображенного на рис. 2.6 можно определить коэффициент трения; для этого нужно постепенно увеличивать угол α наклона плоскости от нуля до тех пор, пока тело не начнет скользить вниз; если измерить максимальный угол α при котором тело еще остается в равновесии, то тангенс этого угла равен искомому коэффициенту трения.

Пример 2.2. На наклонной плоскости с данным углом наклона α большим угла трения, лежит тело весом P . На него действует сила Q , направленная параллельно наклонной плоскости вверх (рис. 2.7). Определить модуль этой силы при условии, чтобы тело оставалось в равновесии.

Решение. Определим наибольшее значение силы Q , при котором еще возможно равновесие, предполагая, что дальнейшее увеличение этой силы вызовет уже скольжение тела вверх по плоскости. В этом случае сила трения F направлена по наклонной плоскости вниз, как указано на рис. 2.7. Обозначая нормальную реакцию плоскости через N и проектируя все силы, приложенные к телу, на оси x и y , получим:

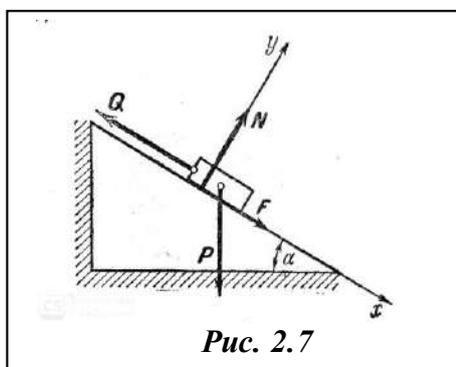


Рис. 2.7

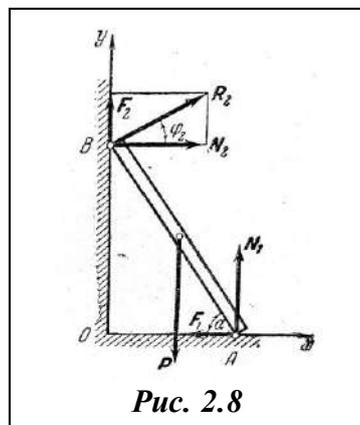


Рис. 2.8

$$Q = F + P \sin a, \quad N = P \cos a;$$

имеем:

$$F \leq fN \text{ или } F \leq fP \cos a;$$

находим:

$$Q \leq P (\sin a + f \cos a),$$

следовательно

$$Q_{\max} = P (\sin a + f \cos a).$$

Найдем наименьшее значение силы Q , необходимой для того, чтобы тело не скользило вниз по плоскости. В этом случае сила трения имеет направление, обратное показанному на (рис. 2.7), т. е. направлена по наклонной плоскости вверх, что, очевидно, соответствует

изменению знака этой силы в предыдущих уравнениях равновесия. Поэтому будем иметь

$$Q_{\min} = P(\sin a - f \cos a).$$

Объединяя оба полученных результата, видим, что тело будет находиться в равновесии в том случае, если модуль силы Q удовлетворяет условиям

$$P(\sin a + f \cos a) \geq Q \geq P(\sin a - f \cos a).$$

Пример 2.3 Лестница AB длиной 2α и весом P опирается концами на вертикальную стену и горизонтальный пол. При каком угле наклона α лестница будет оставаться в равновесии, если коэффициент трения в точках A и B равен f ?

Решение. К лестнице приложены пять сил: вес P , нормальные реакции N_1 и N_2 в точках A и B и силы трения F_1 и F_2 в тех же точках (рис. 2.8).

Проектируя все эти силы на оси Ox и Oy и составляя уравнение моментов относительно точки O , получаем следующие три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} N_2 - F_1 &= 0, \\ N_1 + F_2 - P &= 0, \\ -2N_2 \sin a + 2N_1 \cos a - P \cos a &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим равнодействующую сил F_2 и N_2 , т. е. полную реакцию стены в точке B , через R_2 а угол между R_2 и N_2 обозначим через φ_2 ; тогда

$$F_2 = N_2 \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Если положим $\operatorname{tg} \varphi_2 = k_2$, то

$$F_2 = k_2 N_2.$$

Так как

$$F_2 \leq f N_2,$$

то

$$k_2 \leq f.$$

Аналогично для силы F_1 будем иметь:

$$F_1 = k_1 N_1,$$

причем

$$k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 \leq f.$$

Подставляя эти значения F_1 и F_2 в первые два из уравнений равновесия, получим:

$$N_2 = k_1 N_1, \quad k_2 N_2 + N_1 = P.$$

Из этих уравнений находим:

$$N_1 = \frac{P}{1+k_1k_2}, \quad N_2 = \frac{k_1P}{1+k_1k_2}.$$

Подставляя эти значения в уравнение моментов, получим

$$2k_1 \sin a - 2 \cos a + (1+k_1k_2) \cos a = 0$$

или

$$2k_1 \operatorname{tga} + k_1k_2 = 1.$$

Так как на основании написанных выше неравенств

$$f \geq k_1 \quad \text{и} \quad f^2 \geq k_1k_2,$$

то

$$2f \operatorname{tga} + f^2 \geq 1,$$

откуда

$$\operatorname{tga} \geq \frac{1-f^2}{2f}.$$

Отсюда следует, что наименьшее значение угла наклона a , при котором еще возможно равновесие, определяется из равенства

$$\operatorname{tga}_{\min} = \frac{1-f^2}{2f}.$$

Если заменим здесь коэффициент трения f через $\operatorname{tg} \varphi_{TP}$, где φ_{TP} - угол трения, то

$$\operatorname{tga}_{\min} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \varphi_{TP}}{2\operatorname{tg} \varphi_{TP}} = \operatorname{ctg} \varphi_{TP},$$

откуда следует

$$a_{\min} = 90^\circ - 2\varphi_{TP}.$$

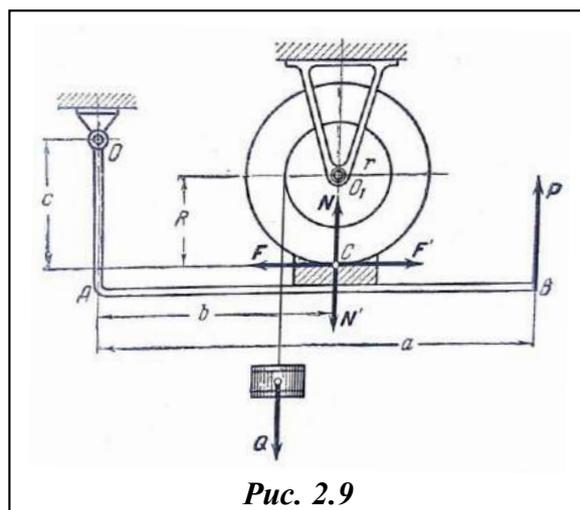
Угол наклона a не может быть больше 90° (при $a = 90^\circ$ лестница стоит у стены в вертикальном положении).

Поэтому приходим к выводу, что лестница остается в равновесии при угле наклона к горизонту, заключающемся в пределах

$$90^\circ \geq a \geq 90^\circ - 2\varphi_{TP}.$$

Пример 2.4. На рис. 2.9 показана схема колодочного тормоза. Найти наименьшее

значение силы P , необходимое для того, чтобы затормозить шкив O . Коэффициент трения между тормозной колодкой и поверхностью шкива равен f .



Решение. Обозначим нормальное давление и силу трения, приложенные к шкиву в точке C , через N и F . К тормозной колодке в той же точке C приложены нормальная реакция шкива N' и сила трения F' , равные по модулю и противоположные по направлению силам N и F соответственно. Напишем условия равновесия для шкива и для рычага OAB в отдельности, приравнявая нулю сумму моментов всех сил, приложенных к шкиву, относительно неподвижной точки O_x и сумму моментов сил, приложенных к рычагу, относительно точки O . Получим, как легко видеть из рис. 2.9, следующие два уравнения:

$$rQ - RF = 0, \quad cF + aP - bN = 0.$$

Кроме того, положим $F = kN$, где $k \leq f$. Подставляя это значение F в предыдущие уравнения и заменяя N' и F' через N и F , получим:

$$kRN = rQ, \quad aP = bN - ckN = (b - ck)N.$$

Определяя величину N из первого уравнения и подставляя ее значение во второе уравнение, находим:

$$P = \frac{Q}{a} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{b - ck}{k} = \frac{Q}{a} \cdot \frac{r}{R} \left(\frac{b}{k} - c \right).$$

Как видно из этой формулы, с увеличением коэффициента k величина P уменьшается; когда k достигает наибольшего значения f , сила P имеет наименьшее значение; следовательно,

$$P_{\min} = \frac{Q}{a} \cdot \frac{r}{R} \left(\frac{b}{f} - c \right).$$

Таким образом аналитический метод решения задач статики при наличии трения остается таким же, как и в тех случаях, когда мы трением пренебрегаем. Различие состоит лишь в том, что в уравнениях равновесия появляются, кроме нормальных реакций, силы

трения. При этом *максимальное* значение силы трения определяется по формуле $F_{\max} = fN$; в большинстве случаев в задачах статики приходится вести расчет именно на максимальное значение силы трения; в частности, в примере 3 мы могли бы проще определить минимальный угол наклона лестницы, при котором еще возможно равновесие, если бы с самого начала в уравнениях равновесия положили $F_1 = fN_1$ и $F_2 = fN_2$; это соответствовало бы предположению, что мы рассматриваем то положение лестницы, при котором силы трения в точках A и B достигают максимального значения (когда тело находится на пороге скольжения). Важно еще заметить, что, как видно из тех же примеров, условия равновесия тела при наличии трения выражаются *неравенствами*. Поэтому при наличии трения имеются не одно или несколько отдельных положений равновесия, а множество смежных положений равновесия тела, или так называемая *область равновесия*. В примере 3 границы области равновесия определяются полученными выше неравенствами

$$90^\circ \geq a \geq 90^\circ - 2\varphi_{\text{тр}}$$

Все это относится к *сухому трению*, т. е. к трению сухих или слабо смазанных твердых тел.

б) Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по другому.

Представим себе цилиндрический каток, положенный на горизонтальную плоскость (рис. 2.10). Пусть P есть вес катка и пусть в его центре O приложена некоторая горизонтальная сила Q . Опыт показывает, что пока сила Q невелика, каток будет оставаться в покое. Следовательно, действующие на каток силы Q и P уравниваются сопротивлением неподвижной плоскости. В точке A соприкосновения катка с плоскостью возникают нормальная реакция N этой плоскости, противоположная весу катка P , и сила трения F , препятствующая скольжению катка по плоскости и равная по модулю силе Q , но направленная в противоположную сторону.

Однако если бы сопротивление неподвижной плоскости сводилось только к силам N и F , то каток не мог бы быть в равновесии, так как пара (Q, F) оставалась бы неуравновешенной. Поэтому необходимо допустить, что реакции неподвижной плоскости приводятся не только к силам N и F , но еще и к некоторой паре, которая уравнивает пару (Q, F) .

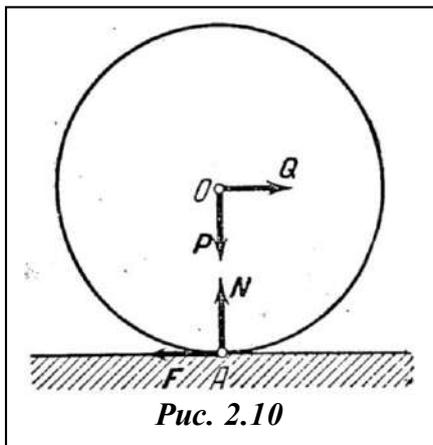


Рис. 2.10

Эта пара, препятствующая качению катка, называется *парой трения качения*. Возникновение этой пары объясняется тем, что вследствие неабсолютной твердости рассматриваемые тела испытывают деформацию, так что каток несколько вдавливается в опорную плоскость и соприкосновение его с этой плоскостью происходит по некоторой малой площадке около точки A . Приводя реакции, распределенные по этой площадке, к точке A , получаем силы N и F , приложенные в этой точке, и пару трения качения. Относительно пары трения качения Кулон нашел, что момент этой пары не может превышать максимального значения; это *максимальное значение момента пары трения*

качения не зависит от радиуса катка и прямо пропорционально нормальному давлению катка на плоскость, или, что то же, нормальной реакции N .

Таким образом, если обозначим абсолютную величину этого максимального момента пары

трения качения через M_{\max} , то $M_{\max} = f_k N$, где f_k — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом трения качения*. Из предыдущего равенства ясно, что *этот коэффициент выражается в линейных единицах*, например в сантиметрах, так как он играет роль плеча пары. Значение коэффициента трения качения зависит от материала катка и опорной плоскости. В таблице 2.1 даны значения этого коэффициента для некоторых тел:

Таблица 2.1

Трущиеся тела	f_k в см
Дерево по дереву.....	0,05—0,06
Мягкая сталь по мягкой стали.....	0,005
Дерево по стали.....	0,03-0,04
Шарик из закаленной стали по стали.....	0,001

Рассмотрим более общий случай равновесия катка. Пусть к катку приложена горизонтальная сила Q в некоторой точке B , так что $AB = h$ (рис. 2.11), и пусть каток находится в покое. В точке A к катку приложены сила трения скольжения F и нормальная реакция N опорной плоскости, направленная вертикально вверх. Кроме того, к катку будет приложена еще пара трения качения. Сложив эту пару с нормальной реакцией, получим, одну силу, равную по модулю этой реакции и имеющую то же направление, но приложенную уже не в точке A , а в некоторой другой точке C ; если расстояние точки C от прямой AO обозначим через d , то $\text{в } d = \frac{M}{N}$, где M есть момент пары трения качения.

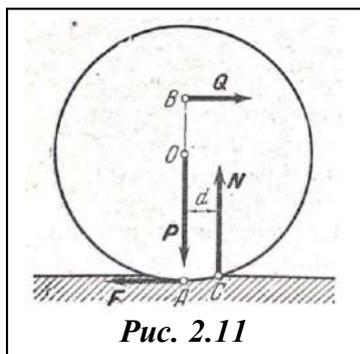


Рис. 2.11

Напишем теперь три уравнения равновесия сил, приложенных к катку, приняв за координатные оси вертикальную и горизонтальную прямые, а за центр моментов точку A . Получим:

$$Q = F, \quad N = P, \quad Qh = Nd.$$

Максимальное значение модуля силы F есть

$$F_{\max} = fN = fP,$$

где f - коэффициент трения скольжения; следовательно

$$Q \leq fP.$$

Кроме того, величина $Nd = M$ есть момент пары трения качения; эта величина не может быть больше $f_k N$; следовательно, $d \leq f_k$, а потому

$$hQ \leq f_k N, \text{ или } hQ \leq f_k P,$$

т.е

$$Q \leq \frac{f_k}{h} P.$$

Итак, при равновесии катка сила Q должна удовлетворять условиям

$$Q \leq fP \quad \text{и} \quad Q \leq \frac{f_k}{h} P.$$

Если эти условия выполнены, то не произойдёт ни скольжения, ни качения катка

в) Жидкостное трение

Кроме **сухого трения** существует ещё так называемое **жидкое трение**, возникающее при движении твёрдых тел в жидкостях и газах и связанное с их вязкостью. Силы жидкого трения пропорциональны скорости движения и обращаются в нуль, когда тело останавливается. Поэтому в жидкости можно заставить тело двигаться, прикладывая даже очень маленькую силу. Например, тяжелую баржу на воде человек может привести в движение, отталкиваясь от дна шестом, а на земле такой груз ему, конечно, не сдвинуть. Эта важная особенность сил жидкого трения объясняет, например, тот факт, почему автомобиль «заносит» на мокрой дороге. Трение становится жидким, и даже небольшие неровности дороги, создающие боковые силы, приводят к «заносу» автомобиля.

Если между твердыми телами, например между вращающимся валом и подшипником, имеется тонкий слой жидкости (смазочного масла), то в этом случае трение называется *жидкостным*. Изучение жидкостного трения, имеющее очень важное практическое значение, относится к области гидродинамики. Основоположником гидродинамической теории смазки является выдающийся русский ученый — профессор Инженерной академии Н. П. Петров; он впервые изучил явление жидкостного трения и теоретически и экспериментально, проведя весьма обширные и точные опыты. Результаты своих исследований Н. П. Петров опубликовал в своей классической работе «Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости» (1883). Дальнейшее развитие гидродинамическая теория смазки получила в трудах Рейнольдса и русских ученых Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина и Н. И. Мерцалова.

Жидкие масла равномерно распределяются по трущимся поверхностям, обладают малым внутренним трением, хорошо работают в значительных диапазонах температур и поэтому являются основными смазочными материалами подшипников скольжения. Наиболее распространены *минеральные масла*-продукты переработки нефти.

Важнейшие свойства масел, определяющие их смазывающую способность, в условиях **жидкостного трения-вязкость**, а при отсутствии жидкостного трения-*маслянистость*. **Вязкость**, или *внутреннее трение жидкостей*, -свойство сопротивляться сдвигу одного слоя жидкости, по отношению к другому. Различают *динамическую* и *кинематическую вязкость*. За единицу динамической вязкости принята вязкость среды, касательное напряжение в которой при ламинарном течении и разности скоростей слоев, находящихся на расстоянии 1 м по нормали к направлению скорости, равной 1 м/с, равно 1 Па. *Кинематической вязкостью* называется отношение динамической вязкости смазочного материала к его плотности.

Смазка подшипников качения влияет на их долговечность, уменьшает трение между телами качения, кольцами и сепаратором, предохраняет их от коррозии и способствует охлаждению подшипника. Для смазки подшипников качения применяют консистентные мази и жидкие минеральные масла. Консистентные мази применяют при температуре подшипника $< 90...100^{\circ} \text{C}$. Допускаемая температура при жидкой смазке $< 120...150^{\circ} \text{C}$, а иногда и выше. Жидкая смазка более эффективна в отношении уменьшения потерь на трение и охлаждения подшипника. Консистентные мази закладывают в камеры корпусов подшипников на $\frac{1}{3}... \frac{2}{3}$ их свободного объема и периодически восполняют.

3. Трение покоя

Трение можно приближенно описать простым законом. Сила, необходимая для того, чтобы преодолеть трение и тащить один предмет по поверхности другого, зависит от силы, направленной по нормали к поверхностям соприкосновения.

Поверхность твёрдого тела обычно обладает неровностями. Например, даже у очень хорошо отшлифованных металлов в электронный микроскоп видны «горы» и «впадины» размером в 100-1000Å. При сжатии тел соприкосновение происходит только в самых высоких местах и площадь реального контакта значительно меньше общей площади соприкасающихся поверхностей. Давление в местах соприкосновения может быть очень большим, и там возникает пластическая деформация.

Если тело, например, просто лежит на горизонтальной поверхности, то сила трения на него не действует. Трение возникает, если попытаться сдвинуть тело, приложить к нему силу. Пока величина этой силы не превышает определённого значения, тело остаётся в покое и сила трения равна по величине и обратна по направлению приложенной силе. Затем начинается движение.

Может показаться, что **сила трения покоя** разгоняет автомобиль. Ведь при движении автомобиля колеса не проскальзывают относительно дороги, и между шинами и поверхностью дороги возникает **сила трения покоя**. Как легко видеть, она направлена в сторону движения автомобиля, (рис.3.1). Величина этой силы не может превосходить максимального значения **трения покоя**. Поэтому если на скользкой дороге резко нажать на газ, то автомобиль начнет буксовать. А вот если нажать на тормоза, то вращение колёс прекратится, и автомобиль будет скользить по дороге. Сила трения изменит своё направление и начнёт тормозить автомобиль.

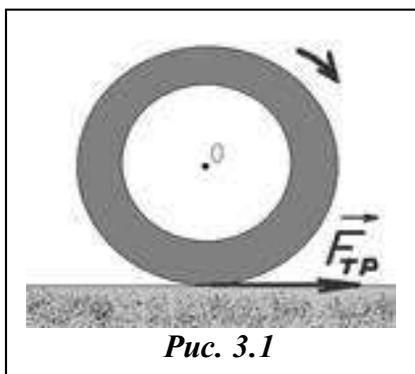


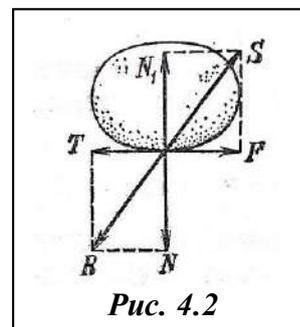
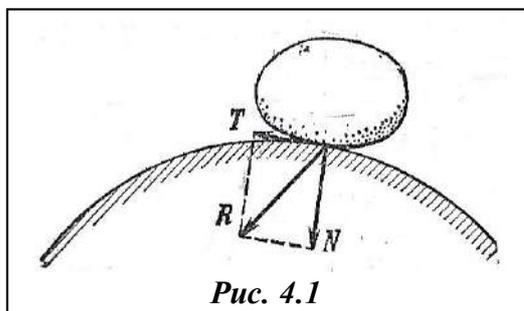
Рис. 3.1

Сила трения при скольжении твёрдых тел зависит не только от свойств поверхностей и силы давления (это зависимость качественно такая же, как для трения покоя), но и от скорости движения. Часто с увеличением скорости сила трения сначала резко падает, а затем снова начинает возрастать.

Вредные колебания могут возникнуть при обработке металла на токарном станке вследствие трения между снимаемой стружкой и резцом. И если смывок натирают канифолью, чтобы сделать зависимость силы трения от скорости более резкой, то при обработке металла приходится действовать наоборот (выбирать специальную форму резца, смазку и т.п.). Так что важно знать законы трения и уметь ими пользоваться.

4. Равновесие твердого тела при наличии трения скольжения, коэффициент

Силы трения скольжения возникают между шероховатым телом и шероховатой поверхностью, если равнодействующая активных сил R не направлена по нормали к поверхности, на которой покоится тело (рис. 4.1). При равновесии тела необходимо, чтобы реакция шероховатой поверхности S (рис. 4.2) равнялась по величине R и была направлена в прямо противоположную сторону.



Разложим активную силу R на нормальную составляющую N и касательную составляющую T , реакцию шероховатой поверхности на нормальную составляющую N_1 и касательную составляющую F , называемую *силой трения скольжения или силой трения первого рода*. При равновесии должны соблюдаться равенства

$$N - N_1 = 0, \quad (4.1)$$

$$T - F = 0. \quad (4.2)$$

Известно, что при изменении величины составляющей T в определенных пределах равновесие тела не нарушается. Следовательно, и сила трения скольжения согласно уравнению (4.2) будет меняться в этих пределах.

Таким образом, сила трения скольжения при покое есть составляющая реакции связи, возникающая при действии активных сил, стремящихся сдвинуть тело. Эта составляющая реакции направлена в сторону, противоположную возможному движению тела. Величина силы трения может меняться от нуля до некоторого предела, в зависимости от величины и направления активных сил, с тем чтобы воспрепятствовать перемещению тела. Отличие силы трения от других реакций связей заключается в том, что ее модуль не может превысить определенного предела.

Зависимость между силой трения и нормальным давлением определяется **законом Кулона**: наибольшая величина силы трения скольжения пропорциональна нормальному давлению тела на поверхность

$$F_{\max} = fN. \quad (4.3)$$

Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную возможному относительному движению. Постоянная f называется *коэффициентом трения скольжения*. Этот коэффициент зависит от материала соприкасающихся тел и их шероховатости (чистоты обработки). Для абсолютно гладких тел коэффициент f равен нулю. Для реальных тел

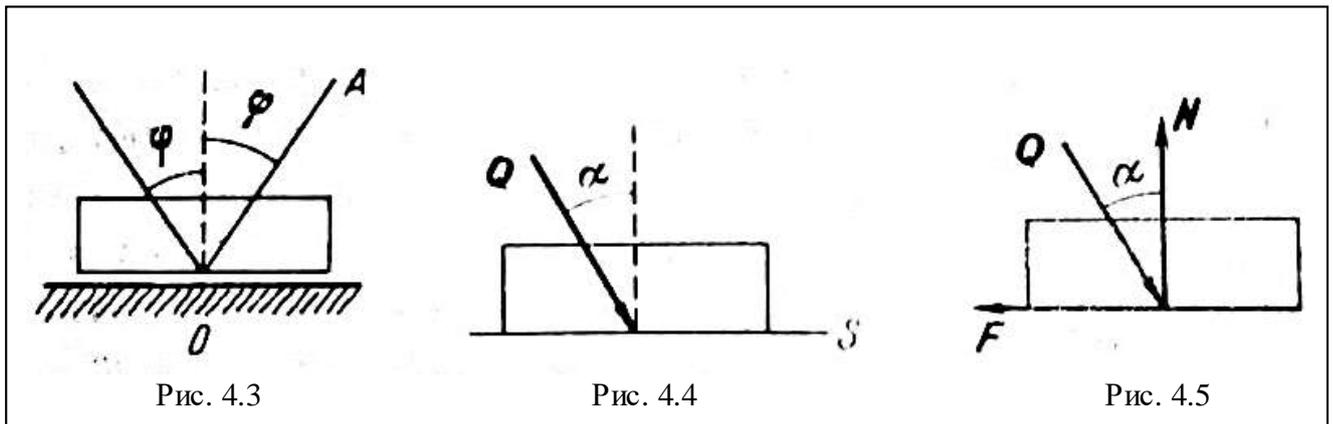
$$f > 0. \quad (4.4)$$

Коэффициент трения не зависит от силы нормального давления и площади соприкосновения.

Угол φ между нормалью к поверхности и полной ее реакцией и положению предельного равновесия, когда $F = F_{\max}$, называется углом трения (рис. 4.3). Этот угол определяется равенством

$$\operatorname{tg} \varphi = f, \quad \text{т.е.} \quad \varphi = \operatorname{arctg} f. \quad (4.5)$$

Построим в точке соприкосновения нормаль к поверхности и прямую OA , составляющую с ней угол φ . Конус, описанный этой прямой как образующей, называется



конусом трения.

Если линия действия равнодействующей активных сил, приложенных к твердому телу, лежит внутри конуса трения, то вне зависимости от ее модуля тело останется в покое. Это объясняется тем, что в этом случае движущая сила будет меньше предельной силы трения.

Рассмотрим равновесие тела, находящегося на горизонтальной плоскости S (рис. 4.4). К телу приложена равнодействующая активных сил Q под углом α к нормали (вес тела входит в Q). Коэффициент трения скольжения $f = \operatorname{tg} \varphi$ известен. Полагая $\alpha < \varphi$, составим уравнение равновесия, приравняв нулю сумму проекций всех сил на направление нормали (рис. 4.5.):

$$N - Q \cos \alpha = 0 \quad N = Q \cos \alpha. \quad (4.6)$$

Проектируя все силы на горизонтальное направление, находим

$$Q \sin \alpha - F = 0 \quad Q \sin \alpha = F \quad (4.7)$$

Замечая, что наибольшее значение силы трения равно

$$F_{\max} = fQ \cos \alpha,$$

$$(4.8)$$

и учитывая, что $tg\alpha < tg\varphi$, заключаем

$$Q \sin \alpha < fQ \cos \alpha. \quad (4.9)$$

Следовательно, сила Q , линия действия которой находится внутри конуса трения, не может сдвинуть тело с места, как бы велика она ни была. На этом свойстве основаны некоторые самотормозящиеся устройства.

Если из Q выделить вес тела P , то неравенство (9) примет вид

$$Q_1 \sin \alpha < f(P + Q_1 \cos \alpha). \quad (4.10)$$

Следовательно, сила Q_1 не может нарушить равновесие тела при

$$f = tg\varphi > \frac{Q_1 \sin \alpha}{P + Q_1 \cos \alpha}. \quad (4.11)$$

Сила трения может принимать различные значения от нуля до наибольшей величины.

При решении задач, рассматривают наибольшее значение силы трения и находят при этом из уравнений равновесия предельные значения искомых величин.

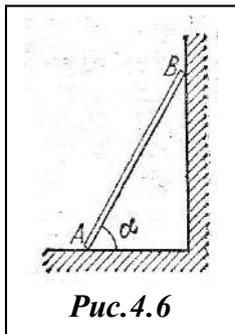


Рис. 4.6

Так, например, рассматривая равновесие лестницы AB (рис. 4.6), опирающейся на гладкую стену и шероховатый пол, найдем наименьшее значение угла α , при котором лестница будет в покое, если возьмем максимальное значение силы трения. Положений равновесия лестницы будет при этом бесчисленное множество, так как при любом значении угла α , большем найденного, но меньшем 90° , для равновесия необходима сила трения меньшая, чем ее максимальная величина.

При решении задач на равновесие твердого тела при наличии сил трения следует реакцию шероховатой поверхности представить двумя составляющими - нормальной реакцией и силой трения, или же, не раскладывая эту реакцию на составляющие, направить ее под углом трения (φ к нормали к поверхности (при максимальной силе трения));

1) сопоставить число неизвестных величин и число независимых уравнений равновесия, которые должны быть равны для статически определенных задач; при этом к уравнениям равновесия твердого тела следует добавить зависимость силы трения от нормального давления (4.3);

2) выбрать систему координат;

3) составить систему уравнений равновесия для сил, приложенных к твердому телу или к системе твердых тел;

4) решив систему уравнений равновесия, определить искомые величины.

Задача 4.1. Определить модуль силы P , при которой начнется движение блока (рис.

4.7a). Вес блока $Q = 2$ кН, высота $h = 0,8$ м, ширина $b = 0,6$ м. Сила P , приложенная в точке B , образует угол 30° с горизонтом. Коэффициент трения между блоком и горизон-

тальным полом $f = 0,2$.

Решение. Движение блока может начаться в двух случаях: а) если начнется скольжение блока по плоскости вправо (рис. 4.7б) и б) если блок начнет опрокидываться вокруг ребра (рис. 4.7в).

Первый случай. В этом случае точка приложения реакции пола N неизвестна. Составим уравнения равновесия — приравняем суммы проекций всех сил на оси координат (рис. б) нулю

$$\begin{aligned}\Sigma F_{kx} &= P \cos 30^{\circ} - F = 0, \\ \Sigma F_{ky} &= N + P \sin 30^{\circ} - Q = 0.\end{aligned}$$

Кроме того, учтем зависимость силы трения от нормального давления

$$F_1 = fN.$$

Определим из данной системы уравнений силу P . Исключая силы F_1 и N , находим

$$P = \frac{fQ}{\cos 30^{\circ} + f \sin 30^{\circ}} = \frac{0,4}{0,965} = 0,415 \text{ кН.}$$

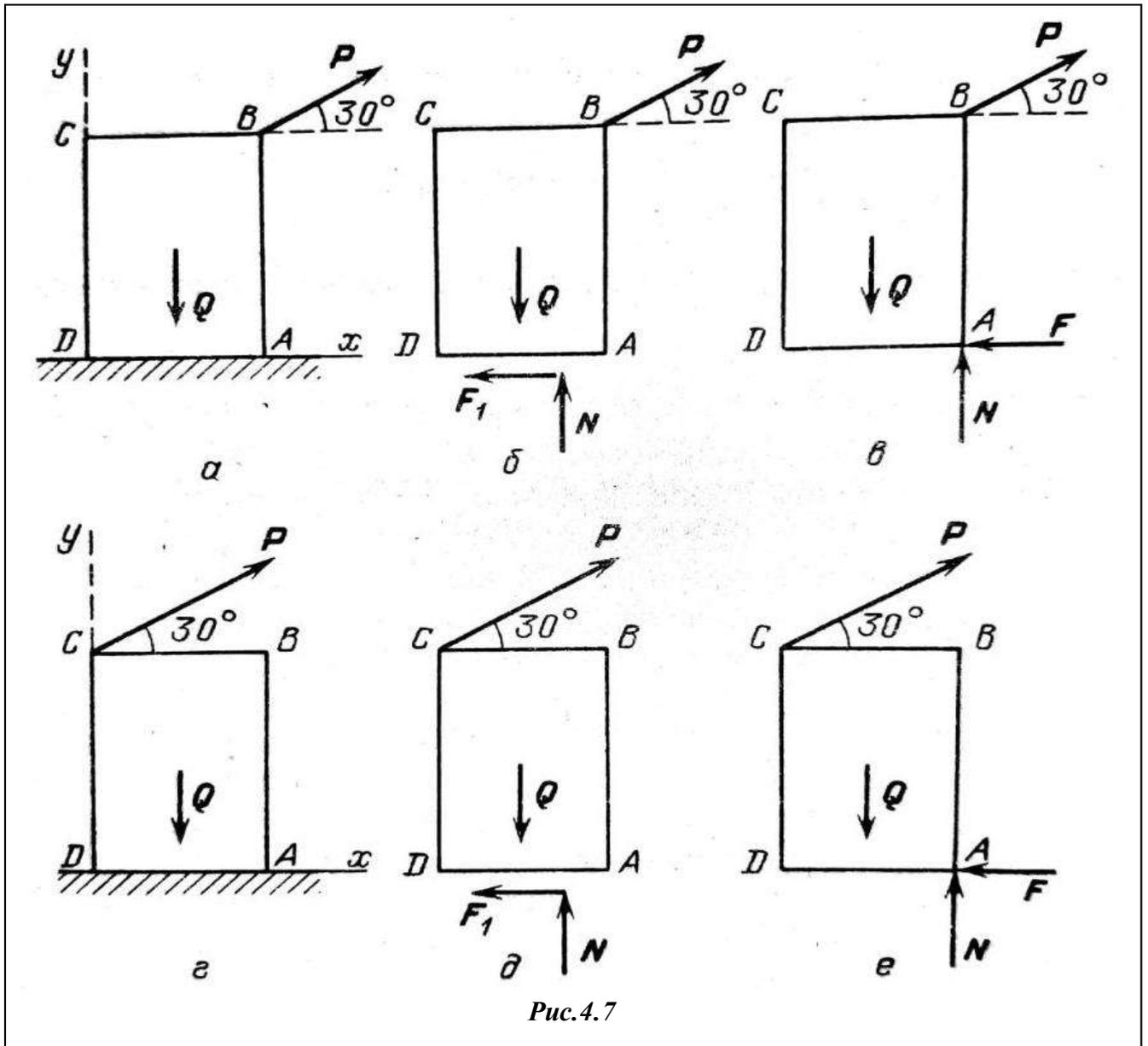


Рис.4.7

Если величина силы P станет больше этого значения, то блок начнет скользить вправо.

Второй случай. В случае возможного опрокидывания блока вокруг ребра A нормальная реакция N и сила трения F будут приложены в точке A (рис. 4.7е).

Составим три уравнения равновесия и четвертое уравнение — зависимость силы трения от нормального давления:

$$\Sigma F_{kx} = P \cos 30^\circ - F = 0, \quad (4.12)$$

$$\Sigma F_{ky} = N - Q + P \sin 30^\circ = 0, \quad (4.13)$$

$$\Sigma m_A(F_k) = Q \cdot \frac{b}{2} - P \cos 30^\circ h = 0, \quad (4.14)$$

$$F = fN. \quad (4.15)$$

Для нахождения величины силы P достаточно найти ее значение из (4.14):

$$P = \frac{Qb}{2h \cos 30^\circ} = \frac{0,2 \cdot 0,6 \cdot 2}{2 \cdot 0,8 \cdot \sqrt{3}} = 0,866 \text{ Кн.}$$

Если модуль силы P станет больше этого значения, то блок начнет опрокидываться около ребра A .

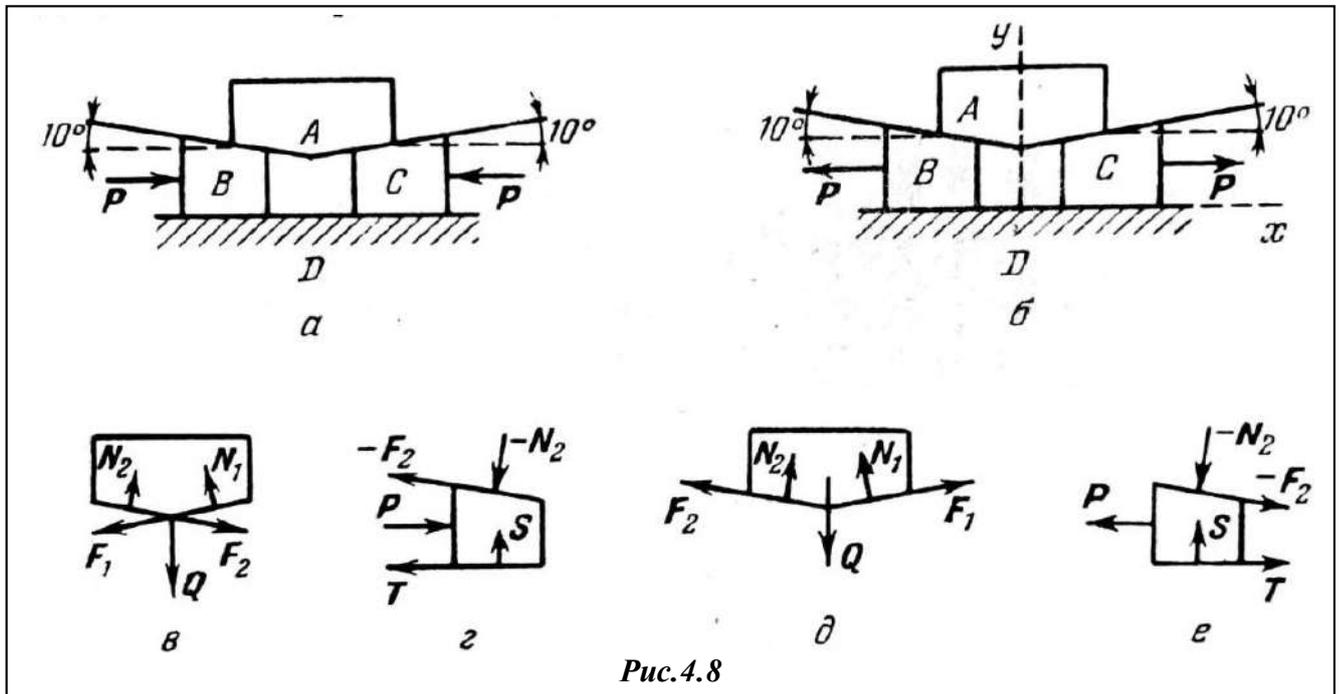


Рис. 4.8

Уравнения (4.12), (4.13), (4.15) смогут быть использованы для определения нормальной реакции и силы трения.

Сопоставляя значения модуля силы P в первом и во втором случаях, заключаем, что так как величина силы P при скольжении меньше ее величины при опрокидывании, то при возрастании модуля силы P от нуля до максимума блок начнет сначала скользить, а не опрокидываться.

Задача 4.2. Для подъема (рис. 4.8а) или опускания (рис. 4.8б) каменного блока A , весящего 20 кН, применили два клина B и C . Коэффициент трения для соприкасающихся поверхностей AB и AC равен $f = 0,2$, а для поверхностей BD и CD равен $f_1 = 0,25$.

Найти равные по величине горизонтальные силы P , сжимающие клинья, необходимые для подъема блока A , определить силы P , растягивающие клинья, необходимые для опускания блока A . Наклонные плоскости соприкосновения блока с клиньями образуют угол 10° с горизонтом.

Решение. Рассмотрим равновесие системы тел, состоящей из блока A , клиньев B и C . При подъеме блока (рис. 4.8а) силы P сжимают клинья. Рассмотрим отдельно равновесие блока и равновесие клина. Отбросив мысленно клинья, заменим их действие на блок нормальными реакциями N и силами трения F (рис. 4.8в). Кроме того, на блок действует известная сила — вес Q . Составим два уравнения равновесия, приравняв нулю суммы проекций всех сил на оси x и y :

$$\begin{aligned}\Sigma F_{kx} &= N_2 \sin 10^\circ - N_1 \sin 10^\circ + F_2 \cos 10^\circ - F_1 \cos 10^\circ = 0, \\ \Sigma F_{ky} &= N_1 \cos 10^\circ + N_2 \cos 10^\circ - Q - F_1 \sin 10^\circ - F_2 \sin 10^\circ = 0.\end{aligned}$$

Кроме того, запишем зависимость сил трения от нормального давления

$$F_1 = fN_1, \quad F_2 = fN_2.$$

Тогда находим

$$N_1 = N_2 = 10,5 \text{ кН}, \quad F_1 = F_2 = 2,1 \text{ кН}$$

Рассмотрим равновесие клина B (рис. 4.8г). На клин действуют: реакция блока, которая раскладывается на нормальную составляющую — N_2 и силу трения — F_2 , активная сила P и реакция пола, разложенная на нормальную силу S и силу трения T . Напишем уравнения равновесия для клина B :

$$\begin{aligned}\Sigma F_{kx} &= -N_2 \sin 10^\circ - F_2 \cos 10^\circ - T + P = 0, \\ \Sigma F_{ky} &= S + F_2 \sin 10^\circ - N_2 \cos 10^\circ = 0.\end{aligned}$$

Кроме того, имеем зависимость силы трения от нормального давления

$$T = f_1 S.$$

Отсюда, пользуясь найденными ранее значениями реакций, найдем

$$S = 9,96 \text{ кН}, \quad T = 2,49 \text{ кН}, \quad P = 6,41 \text{ кН}.$$

Таким образом, для равновесия системы при подъеме блока получено необходимое значение силы $P = 6,41$ кН. Если же $P > 6,41$ кН, то начнется подъем блока; система придет в движение.

Определим величины силы P при спуске блока. Блок A находится в равновесии (рис. 4.8д) под действием активной силы — веса Q , нормальных реакций клиньев N_1 и N_2 и сил трения F_1 и F_2 . Силы трения в этом случае направлены вдоль наклонной плоскости вверх. Это видно из рассмотрения равновесия клина B (рис. 4.8е), так как в связи с изменением направления силы P на прямо противоположное силы T и $-F_2$ меняют свое направление на противоположное по сравнению с предыдущим случаем (рис. 4.8г).

Уравнения равновесия для блока A будут

$$\begin{aligned}\Sigma F_{kx} &= F_1 \cos 10^\circ - F_2 \cos 10^\circ - N_1 \sin 10^\circ + N_2 \sin 10^\circ = 0, \\ \Sigma F_{ky} &= N_1 \cos 10^\circ + N_2 \cos 10^\circ + F_1 \sin 10^\circ + F_2 \sin 10^\circ - Q = 0.\end{aligned}$$

Кроме того, зависимость силы трения от нормального давления дается равенствами

$$F_1 = fN_1, \quad F_2 = fN_2.$$

Отсюда находим

$$N_1 = N_2 = 9,8 \text{ кН}, \quad F_1 = F_2 = 1,96 \text{ кН}$$

Уравнения равновесия для клина B (рис. 4.8e) будут:

$$\Sigma F_{kx} = T + F_2 \cos 10^\circ - N_2 \sin 10^\circ - P = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = S - N_2 \cos 10^\circ - F_2 \sin 10^\circ - P = 0.$$

Сила трения выражается через нормальное давление

$$T = f_1 S.$$

Пользуясь ранее найденными значениями реакций N_2 и F_2 , найдем

$$S = 9,99 \text{ кН}, \quad T = 2,50 \text{ кН}, \quad P = 2,73 \text{ кН}.$$

Найденное значение P является граничным при равновесии системы в случае опускания блока.

Таким образом, система будет находиться в равновесии, если проекция силы P лежит в пределах

$$-2,73 \text{ кН} \leq P_x \leq 6,41 \text{ кН}$$

Если модуль каждой из сил P будет больше 6,41 кН, то при их направлении, указанном на рис. 4.8a, начнется подъем блока. Для того чтобы блок начал опускаться, нужно приложить силы P в противоположном направлении, причем их модуль должен превышать 2,73 кН.

Задача 4.3. Полуцилиндр весом P и радиуса R лежит на негладкой горизонтальной плоскости (рис. 4.9a). Однородный стержень OA длиной l и весом Q шарнирно закреплен в точке O . Он опирается на гладкую поверхность полуцилиндра, образуя угол α с вертикалью $OB = h$.

Определить наименьшее значение коэффициента трения скольжения f между полуцилиндром и горизонтальной плоскостью при равновесии.

Решение. Полуцилиндр и стержень являются системой твердых тел, находящихся в равновесии. Под действием веса стержня полуцилиндр может начать движение вправо (при недостаточной силе трения между полуцилиндром и полом). Для определения искомой наименьшей величины коэффициента трения скольжения между полуцилиндром и горизонтальной плоскостью рассмотрим отдельно равновесие стержня и полуцилиндра.

Рассматривая равновесие стержня OA (рис. 4.9б), отбросим мысленно шарнир O и заменим его действие реакцией. Реакция шарнира приложена в точке O и неизвестна по величине и направлению. Представим реакцию двумя составляющими F_{0x} и F_{0y} . Отбрасывая мысленно полуцилиндр, заменим его действие на стержень реакцией S_1 направленной перпендикулярно к стержню, так как согласно условию трение между стержнем и полуцилиндром отсутствует. Величина реакции S_1 неизвестна. Кроме указанных реакций, к стержню в его середине приложен вес Q , направленный по вертикали.

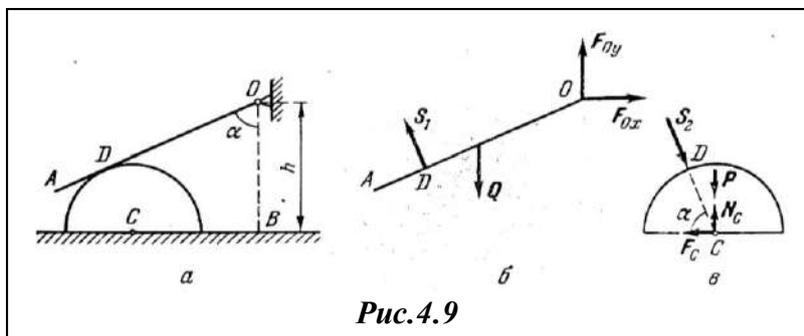


Рис. 4.9

На рис. 4.9в представлены силы, действующие на полуцилиндр при равновесии. Полуцилиндр находится в равновесии под действием трех сил: веса P , реакции стержня S_2 и

реакции негладкой горизонтальной плоскости. Вес P направлен по вертикальной оси симметрии полуцилиндра и, следовательно, линия действия этой силы проходит через точку C , лежащую на оси цилиндра. Реакция стержня S_2 согласно пятому закону (закон равенства действия и противодействия) равна по величине и направлена противоположно.

Следовательно, реакция S_2 перпендикулярна к стержню, совпадающему по направлению с касательной к полуцилиндру, и направлена по радиусу DC . Этот радиус образует с горизонтальным диаметром полуцилиндра угол α , так как стороны AO и BO , образующие угол α , соответственно перпендикулярны к прямой DC и горизонтальному диаметру.

Равнодействующая реакций негладкой горизонтальной плоскости должна быть приложена в точке C . Действительно, полуцилиндр находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости. Следовательно, линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке. Но силы S_2 и P пересекаются в точке C . Значит, и линия действия равнодействующей реакции негладкой плоскости должна проходить через точку C . А это возможно только в том случае, если эта реакция приложена в точке C . Разложим реакцию горизонтальной плоскости на две составляющие: нормальную реакцию N_c и силу трения F_c .

Перейдем к составлению уравнений равновесия обоих тел. Составим для стержня сумму проекций всех сил на оси x и y и приравняем их нулю:

$$F_{ox} - S \cos \alpha = 0, \quad (4.16)$$

$$F_{oy} - Q + S_1 \sin \alpha = 0. \quad (4.17)$$

Уравнение моментов относительно точки O будет

$$Q \frac{AO}{2} \sin \alpha - S_1 \cdot OD = 0. \quad (4.18)$$

Точка O выбрана за центр моментов, так как при этом составляющие реакции шарнира O не входят в уравнение моментов. Таким образом, из последнего уравнения непосредственно находится неизвестная сила S , а только эта сила из входящих в систему уравнений (4.16) — (4.18) и войдет далее в уравнения равновесия полуцилиндра. Уравнения (4.16) — (4.17) могут быть использованы для нахождения неизвестных составляющих реакций шарнира F_{ox} , F_{oy} .

Из уравнения (4.18), пользуясь равенством

$$OD \cos \alpha = h - r \sin \alpha, \quad (4.19)$$

Найдем

$$S_1 = Q \frac{AO}{2 \cdot OD} \sin \alpha = Q \frac{l \cos \alpha \sin \alpha}{2(h - r \sin \alpha)}. \quad (4.20)$$

Перейдем к составлению уравнений равновесия для полуцилиндра. Проектируя силы, приложенные к полуцилиндру, на оси координат, получим два уравнения равновесия:

$$S_2 \cos \alpha - F_c = 0, \quad (4.21)$$

$$N_c - S_2 \sin \alpha - P = 0. \quad (4.22)$$

Кроме того, сила трения связана с нормальной реакцией зависимостью

$$F_c = fN_c. \quad (4.23)$$

Учитывая равенство $S_1 = S_2$, получим систему четырех уравнений (4.20) — (4.23) с четырьмя неизвестными S , F_c , N_c , f . Для нахождения наименьшего значения коэффициента трения f исключим из рассматриваемой системы остальные неизвестные. Внося (4.20) и (4.23) в уравнение (4.21), получим

$$Q \frac{l \sin 2\alpha \cos \alpha}{4(h - r \sin \alpha)} - fN_c = 0. \quad (4.24)$$

Подставляя (4.20) в (4.22), найдем

$$N_c = P + Q \frac{l \sin 2\alpha \sin \alpha}{4(h - r \sin \alpha)}. \quad (4.25)$$

Исключая из полученных уравнений (4.24) и (4.25) реакцию N_c , получим окончательно

$$f = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \frac{2P}{Q} \left(\frac{2h}{l \sin 2\alpha} - \frac{r}{l \cos \alpha} \right)}.$$

Это и есть наименьшее значение **коэффициента трения**, при котором полуцилиндр и стержень будут находиться в равновесии

Задача 4.4. Крутящий момент электродвигателя лебедки равен M — 1,2 кН·м. Для остановки двигателя служат тормозные колодки тормоза A (рис. 4.10 а), прижимающиеся силами P к тормозному диску B , жестко связанному с ротором двигателя. Радиус тормозного диска $r = 600$ мм.

Определить силу давления P , необходимую для удержания ротора в равновесии, если **коэффициент трения** между деревянными колодками и чугунным тормозным диском равен $f = 0,5$.

Решение. Рассмотрим равновесие тормозного диска B (рис. 4.10б). К диску приложена активная пара — крутящий момент M .

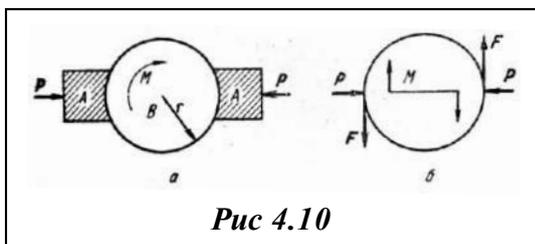


Рис 4.10

Отбрасывая мысленно тормозные колодки, заменяем их действие реакциями. Каждая реакция раскладывается на две составляющие: нормальное давление P и силу трения F . Зависимость между нормальным давлением и силой трения выражается при помощи коэффициента трения

$$F = fP.$$

$$(4.26)$$

Для равновесия диска необходимо, чтобы сумма моментов всех сил, приложенных к диску, равнялась нулю. Силы P взаимно уравниваются и в уравнение моментов не входят. Силы трения образуют пару сил; крутящий момент представляет собой также пару сил. Сумма моментов сил, составляющих пару относительно любой точки, равна моменту пары. Таким образом,

$$F \cdot 2r - M = 0. \quad (4.27)$$

Подставляя значение силы трения (4.26) в уравнение (4.27), имеем

$$fP \cdot 2r - M = 0,$$

откуда

$$P = \frac{M}{2rf} = \frac{1,2}{2 \cdot 0,6 \cdot 0,5} = 2 \text{ кН}$$

Задача 4.5. Электрическая лебедка (рис. 4.11а) весом $Q = 2$ кН крепится к фундаменту при помощи шести болтов. Максимальная сила тяги T равна 8 кН и направлена под углом 30° к горизонту. Коэффициент трения между основанием лебедки и фундаментом равен $f = 0,5$.

Определить силу затяжки болтов, при которой срезающее усилие в них равно нулю и лебедка удерживается от сдвига одной силой трения.

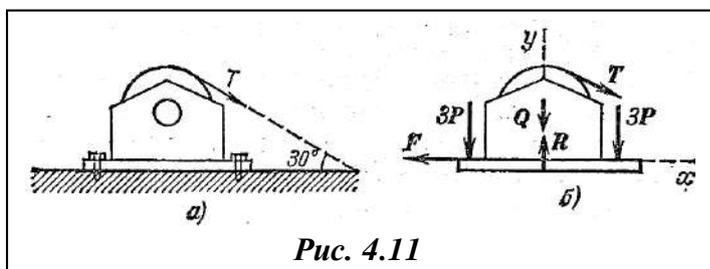


Рис. 4.11

Решение. Рассмотрим равновесие лебедки. К ней приложены две активные силы: вес Q и сила тяги T . Отбрасывая мысленно связи — болты и фундамент, заменим их действие реакциями (рис. 4.11б). Полагая затяжку всех шести болтов одинаковой, заменяем их действие двумя силами по $3P$ каждая.

Реакцию фундамента раскладываем на нормальную составляющую R и силу трения F . Силу трения направляем по горизонтали влево, в сторону, противоположную возможному сдвигу лебедки. Так как срезающее усилие в болтах равно нулю, то следует рассмотреть равновесие лебедки как равновесие свободного твердого тела, находящегося под действием сил: Q , T , $3P$, $3P$, R , F .

Выберем оси координат: ось x направим по горизонтали вправо, ось y вертикально вверх. Составим сумму проекций всех сил на ось y и приравняем ее нулю:

$$R - 6P - Q - T \sin 30^\circ = 0.$$

Из этого уравнения определяется нормальная составляющая реакции фундамента, равная по величине нормальному давлению на фундамент:

$$R = 6P + Q + T \sin 30^\circ = 6P + 2 + 8 \cdot 0,5 = 6P + 6. \quad (4.28)$$

Приравняв нулю сумму проекций всех сил на ось x , имеем

$$T \cos 30^\circ - F = 0.$$

Из этого уравнения определяется необходимая для равновесия **сила трения**:

$$F = T \cos 30^\circ = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6,92 \text{ кН} \quad (4.29)$$

Зависимость между силой трения и нормальным давлением определяется формулой

$$F = fR$$

Подставив в это выражение значение силы трения нормального давления и коэффициента трения, получим

$$6,92 = (6P + 6)f = (6P + 6)0,5,$$

откуда определим необходимую силу затяжки болтов

$$P = \frac{6,92 - 6 \cdot 0,5}{6 \cdot 0,5} \approx 1,3 \text{ кН}$$

Таким образом, для того чтобы болты не испытывали срезающих усилий и лебедка удерживалась от сдвига силой трения, необходимо и достаточно, чтобы затяжка каждого болта удовлетворяла условию

$$P \geq 1,3 \text{ кН}$$

Задача 4.6. Однородный прямолинейный стержень AB весом Q (рис. 4.12а) опирается в точке B на шероховатую вертикальную стену. Коэффициент трения между стержнем и стеной равен f .

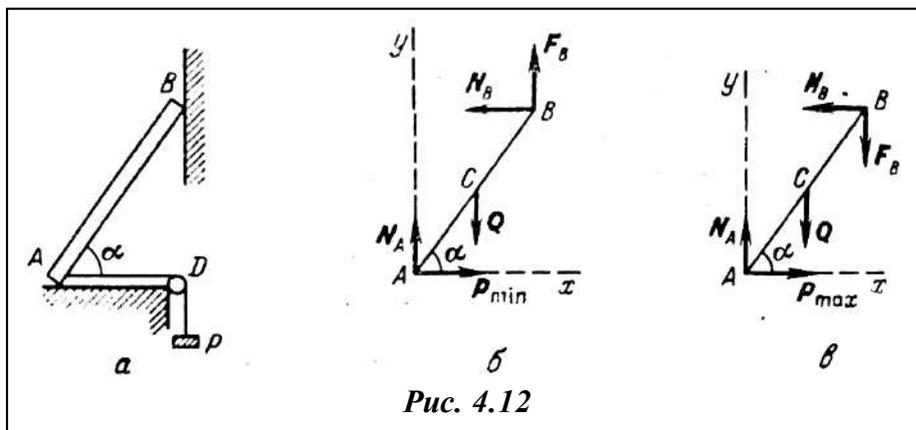


Рис. 4.12

В точке A стержень опирается на горизонтальный гладкий пол. Стержень удерживается в равновесии нитью AD , перекинутой через блок D . К концу нити подвешен груз P .

Определить пределы, в которых можно изменять величину груза P , чтобы

не нарушить равновесия стержня.

Решение. Рассмотрим равновесие стержня AB . На него действует одна активная сила, вес стержня Q , приложенный посередине стержня в точке C и направленный по вертикали вниз.

На стержень наложены три связи: горизонтальный пол, вертикальная стена и нить AD . На основании закона освобожденности от связей отбросим мысленно связи и заменим их

действие реакциями. Реакция гладкого пола N_A направлена перпендикулярно к полу, натяжение нити P направлено по горизонтали вправо, реакция шероховатой вертикальной стены может быть представлена двумя составляющими: нормальной реакцией N_B , направленной по горизонтали влево, и силой трения F_B . Сила трения направлена по вертикали: 1) в случае, когда груз P наименьшей величины и, следовательно, возможное направление движения точки — вниз, сила трения F_B направлена вверх (рис. 4.12б), в сторону, противоположную возможному движению; 2) в случае, когда груз P наибольшей величины, точка B может начать скользить по стене вверх и, следовательно, сила трения F_B (рис. 4.12в) направлена по вертикали вниз, опять-таки в сторону, противоположную возможному движению.

Рассматривая равновесие стержня AB как свободного твердого тела, находящегося под действием пяти сил: $Q, N_A, N_B, F_B, P_{\min}$ (рис. 4.12б), найдем минимальное значение веса груза P_{\min} . Выберем оси координат — ось x направим по горизонтали вправо, ось y вертикально вверх. Составим уравнения равновесия (рис. 4.12 б):

$$\begin{aligned}\Sigma F_{kx} &= P_{\min} - N_B = 0, \\ \Sigma F_{ky} &= N_A + F_B - Q = 0, \\ \Sigma m_B(F_k) &= P_{\min} l \sin \alpha + Q \cdot 0,5l \cos \alpha - N_A l \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

Через l в последнем уравнении обозначена длина стержня AB . Кроме того, напомним зависимость силы трения от нормального давления

$$F_B = fN_B.$$

Задача является статически определенной, так как система из четырех уравнений содержит четыре неизвестных: N_A, F_B, N_B, P_{\min} - Решая совместно эту систему уравнений, находим искомое минимальное значение величины груза P :

$$P_{\min} = \frac{Q}{2(\operatorname{tg} \alpha + f)}. \quad (4.29)$$

Для определения наибольшей величины груза P рассмотрим равновесие стержня AB (рис. 4.12в) как свободного твердого тела, находящегося под действием пяти сил: $N_B, F_B, Q, N_A, P_{\max}$ - Тогда уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned}\Sigma F_{kx} &= P_{\min} - N_B = 0, \\ \Sigma F_{ky} &= N_A - F_B - Q = 0, \\ \Sigma m_B(F_k) &= P_{\min} l \sin \alpha + Q \cdot 0,5l \cos \alpha - N_A l \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

кроме того,

$$F_B = fN_B.$$

Решая совместно эту систему уравнений, находим наибольшую величину груза P , при которой стержень будет в равновесии:

$$P_{\min} = \frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha - f)}. \quad (4.30)$$

Из уравнения (4.30) следует, что P_{\max} неограниченно возрастает, если $\operatorname{tg}\alpha \rightarrow f$. При $\operatorname{tg}\alpha < f$ для возможности подъема стержня (скольжения точки B вверх по стене) необходимо, чтобы сила Q была направлена вверх по вертикали, что невозможно. Таким образом, в этом случае не существует силы P_{\max} , которая могла бы нарушить равновесие лестницы.

Таким образом, равновесие стержня возможно при изменении веса груза P в пределах

$$\frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha - f)} \geq P \geq \frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha + f)}. \quad (4.31)$$

Эта задача может быть решена и несколько иным путем. Замечаем, что по условию задачи не требуется определения неизвестной реакции гладкого пола N_A . Поэтому из уравнений равновесия стержня (рис. 4.12б) выберем такие, которые не содержат N_A . Составим уравнение моментов всех сил относительно точки A :

$$\Sigma m_A(F_k) = N_B l \sin \alpha + F_B l \cos \alpha - Q \frac{l}{2} \cos \alpha = 0 \quad (4.32)$$

Второе уравнение равновесия — равенство нулю суммы проекций всех сил на горизонтальную ось x . В него также не войдет неизвестная сила N_A :

$$\Sigma F_{kx} = P_{\min} - N_B = 0. \quad (4.33)$$

К этим двум уравнениям добавляется соотношение между нормальной реакцией и силой трения в точке B :

$$F_B = fN_B. \quad (4.34)$$

Подставив значение F_B из (4.34) в (4.32) и учитывая (4.33), получим

$$P_{\min} = \frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha + f)}. \quad (4.35)$$

Аналогично для нахождения наибольшего значения силы P составим такие же уравнения равновесия (рис. 4.12в):

$$\Sigma m_A(F_k) = N_B l \sin \alpha - F_B l \cos \alpha - Q \frac{l}{2} \cos \alpha = 0,$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{kx} &= P_{\min} - N_B = 0. \\ F_B &= fN_B.\end{aligned}$$

Решив совместно эту систему уравнений, определим максимальное значение силы P :

$$P_{\max} = \frac{Q}{2(\operatorname{tg}\alpha - f)}. \quad (4.36)$$

Таким образом, пришли к следующему результату.

Сопоставляя оба решения, мы видим, что в первом случае мы применили общий метод составления уравнений равновесия для твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил, не учитывая особенностей данной задачи.

Такой путь не является самым простым и коротким. На примере второго способа решения мы видим, что при учете особенности данной задачи (в задаче не требуется определить величину реакции гладкого пола NA) удалось составить меньшее число уравнений равновесия, которые проще и скорее привели к цели.

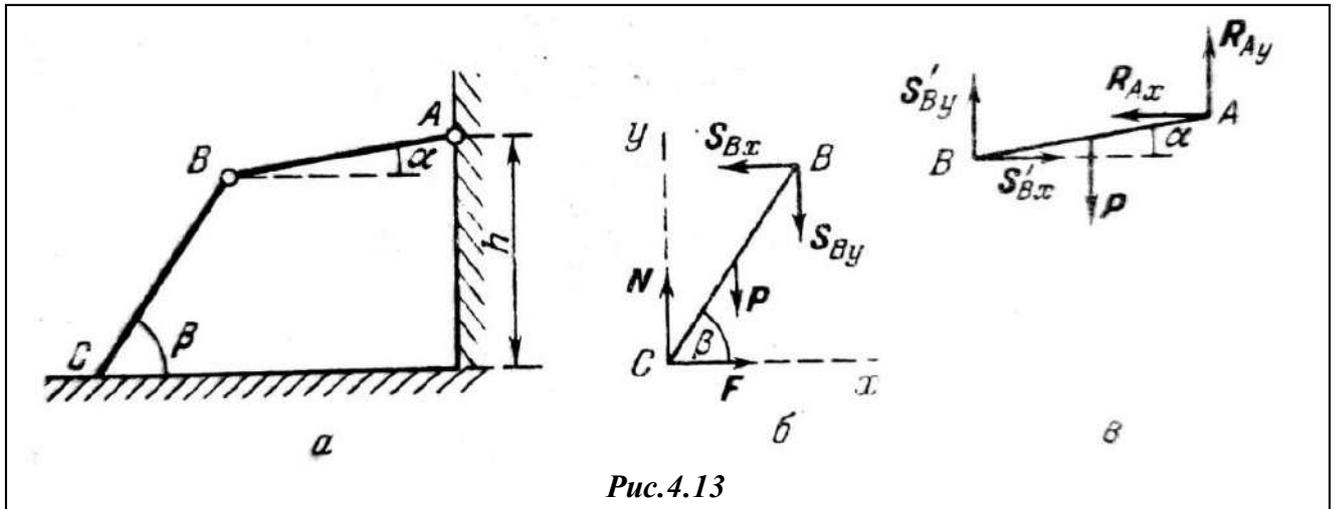


Рис.4.13

Задача 4.7. Два одинаковых однородных стержня AB и BC , весом P и длиной l каждый, шарнирно соединены между собой. В точке A стержень AB шарнирно прикреплен к вертикальной стене. Точка A находится на высоте h над горизонтальным полом, на который концом C свободно опирается стержень BC .

Зная коэффициент трения f между стержнем BC и горизонтальным полом, определить угол β при равновесии.

Решение. Рассмотрим отдельно равновесие стержня BC (рис. 4.13б) и стержня AB (рис. 4.13в). Отбросив мысленно связи, заменим их действие реакциями. К стержню BC приложены силы: вес P , нормальная реакция горизонтального пола N и сила трения F , направленная в сторону, противоположную возможному движению; реакция шарнира B не известна ни по величине, ни по направлению (представим ее двумя составляющими S_{Bx} и S_{By}).

К стержню AB приложены силы: вес P ; составляющие реакции шарнира B , равные и противоположные силам, приложенным к точке B к стержню BC (обозначим эти составляющие через S'_{Bx} и S'_{By} составляющие реакции шарнира A , названные R_{Ax} и R_{Ay}).

Составим уравнения предельного равновесия для стержня BC :

$$F - S_{Bx} = 0, \quad (4.37)$$

$$N - P - S_{By} = 0, \quad (4.38)$$

$$Fl \sin \beta - Nl \cos \beta + P \frac{l}{2} \cos \beta = 0, \quad (4.39)$$

$$F = fN. \quad (4.40)$$

Уравнение моментов (4.39) составлено относительно точки B . Уравнение (4.40) дает зависимость **силы трения** от нормального давления.

Уравнения равновесия для стержня AB будут

$$S_{Bx} - R_{Ax} = 0, \quad (4.41)$$

$$S_{By} - P + R_{Ay} = 0, \quad (4.42)$$

$$S_{Bx}l \sin \alpha - S_{By}l \cos \alpha + P \frac{l}{2} \cos \alpha = 0. \quad (4.43)$$

Здесь сумма моментов сил (4.43) составлена относительно точки A .

Чтобы найти уравнения, определяющие зависимость между углами α и β , решим совместно составленные уравнения, кроме уравнений (4.41) и (4.42), так как последние содержат R_{Ax} и R_{Ay} , которые согласно условию задачи находить не нужно. Из уравнения (4.37), (4.38) и (4.40) найдем

$$S_{Bx} = f(P + S_{By}). \quad (4.44)$$

Исключив из уравнения (4.39) неизвестные F , N , получим

$$S_{Bx}l \sin \beta - (P + S_{By})l \cos \beta + \frac{Pl}{2} \cos \beta = 0. \quad (4.45)$$

Разделив это равенство на $l \cos \beta$ и воспользовавшись равенством (4.44), найдем

$$f(P + S_{By}) \operatorname{tg} \beta - S_{By} - \frac{P}{2} = 0. \quad (4.46)$$

С другой стороны, разделив уравнение (4.43) на $l \cos \alpha$ и воспользовавшись равенством (4.44), получим

$$f(P + S_{By}) \operatorname{tg} \alpha - S_{By} - \frac{P}{2} = 0.$$

(4.47)

найдем

$$3 \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha = 2 / f. \quad (4.48)$$

Это первое уравнение, определяющее углы α, β в положении равновесия. Второе уравнение найдем из геометрического равенства

$$l \sin \beta + l \sin \alpha = h, \quad (4.49)$$

откуда получим

$$\sin \beta + \sin \alpha = h / l. \quad (4.50)$$

Исключив из равенств (4.48) и (4.50) угол α , найдем

$$3 \operatorname{tg} \beta - \frac{h / l - \sin \beta}{\sqrt{1 - (h / l - \sin \beta)^2}} = \frac{2}{f}.$$

Если β_0 — корень этого уравнения, то равновесие системы будет при любом $\beta > \beta_0$

Задача 4.8. Однородный стержень AB длиной l опирается концом A на внутреннюю гладкую поверхность пустотелого полуцилиндра радиуса r и концом B на шероховатый горизонтальный пол ($l < 2r$). В положении равновесия центр тяжести стержня C находится на вертикальном диаметре полуцилиндра.

Определить угол β , составляемый стержнем с полом в положении равновесия, и коэффициент трения скольжения между стержнем и полом, полагая, что сила трения достигает в этом положении стержня своего предельного значения.

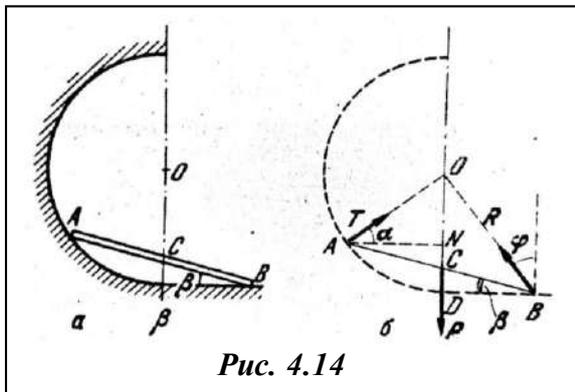


Рис. 4.14

Решение. Рассмотрим равновесие стержня AB . На стержень действует одна активная сила, вес стержня P . Так как центр тяжести стержня C лежит на одной вертикали с центром цилиндра O , то линия действия силы тяжести проходит через точку O . На стержень наложены две связи: гладкая поверхность полуцилиндра и шероховатый пол. Применим закон освобождения от связей. Отбросим мысленно связи (рис. 4.14б) и заменим их действие реакциями. Реакция гладкой стенки полуцилиндра направлена нормально к его поверхности, т. е. по

радиусу AO . Изобразим ее силой T . Следовательно, в точке O пересекаются линии действия двух сил: реакции T и веса P . Но стержень находится в равновесии под действием трех сил: T , P и реакции пола в точке B . Согласно теореме о трех непараллельных силах линия действия реакции пола R должна также пересекать точку O . Направим реакцию R по линии BO (рис. 4.14б). Угол между нормалью к полу и реакцией R есть угол трения φ , причем $f = \operatorname{tg} \varphi$. Из треугольника OBD найдем

$$f = \operatorname{tg} \varphi = \frac{BD}{OD} = \frac{BC \cos \beta}{OD} = \frac{l \cos \beta}{2r}. \quad (4.51)$$

Обозначим угол между силой T и линией горизонта буквой α . Тогда, опуская перпендикуляр AN из точки A на вертикальный диаметр, имеем $AN = AO \cos \alpha = AC \cos \beta$, или

$$r \cos \alpha = \frac{l}{2 \cos \beta} \beta. \quad (4.52)$$

Аналогично $ON = r \sin \alpha$ и $DN = l \sin \beta$ следовательно,

$$r \sin \alpha + l \sin \beta = r. \quad (4.53)$$

Решая совместно уравнения (4.51) и (4.52), найдем

$$\cos \alpha = f. \quad (4.54)$$

Обозначив для краткости $\frac{l}{2r} = b < 1$ (так как $l < 2r$), найдем из (4.52) и (4.53), что

$$\cos \alpha = b \cos \beta, \quad (4.55)$$

$$\sin \alpha = 1 - 2b \sin \beta. \quad (4.56)$$

Возведем равенства (4.55) и (4.56) в квадрат и сложим. После преобразований получим

$$3b \sin^2 \beta - 4 \sin \beta + b = 0,$$

откуда

$$\sin \beta = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3b^2}}{3b}.$$

Следовательно,

$$\cos \beta = \frac{2}{3b} \sqrt{3b^2 - 2 \pm \sqrt{4 - 3b^2}}.$$

Знак минус перед вторым корнем должен быть отброшен, так как

$$3b^2 - 2 - \sqrt{4 - 3b^2} < 0$$

и значение $\cos \beta$ будет при этом мнимым. Окончательно

$$\cos \beta = \frac{2}{3b} \sqrt{3b^2 - 2 + \sqrt{4 - 3b^2}}.$$

$$f = b \cos \beta = \frac{2}{3} \sqrt{3b^2 - 2 + \sqrt{4 - 3b^2}}.$$

Решение этой задачи отличается от большинства задач на равновесие при наличии **трения** тем, что мы не разлагаем реакцию шероховатой поверхности на нормальную составляющую и силу трения.

Задача 4.9. Две одинаковые призмы A и B образуют лестницу. Ступени нагружены силами P и Q , точки приложения которых заданы (рис. 4.15а). Призма A опирается на вертикальную стену и наклоненную под углом α плоскость второй призмы. Призма B опирается на горизонтальный пол.

Определить условия равновесия, учитывая **трение** всех контактирующих поверхностей. Коэффициенты трения призм о горизонтальный пол, вертикальную стену и друг о друга одинаковы и равны $f = \operatorname{tg} \varphi$. Собственными весами призм можно пренебречь по сравнению с силами P и Q .

Решение. Рассмотрим равновесие каждой из призм, отбросив мысленно стену, пол и другую призму, заменив их действия нормальными реакциями N_1, N_2, N_3 и **силами трения** T_1, T_2, T_3 .

Расчетные схемы показаны на рис. 4.15б для верхней призмы и на рис. 4.15в для нижней.

Максимальные значения касательных сил (сил трения) при равновесии равны

$$T_1 = fN_1, \quad T_2 = fN_2, \quad T_3 = fN_3$$

В проекциях на координатные оси уравнения равновесия имеют вид для призмы A

$$N_1 - N_2 \sin \alpha + fN_2 \cos \alpha = 0, \quad N_2 \cos \alpha + fN_1 - P + fN_2 \sin \alpha = 0,$$

для призмы B

$$-fN_2 \cos \alpha + N_2 \sin \alpha - fN_3 = 0,$$

$$-fN_2 \sin \alpha - N_2 \cos \alpha - Q + N_3 = 0.$$

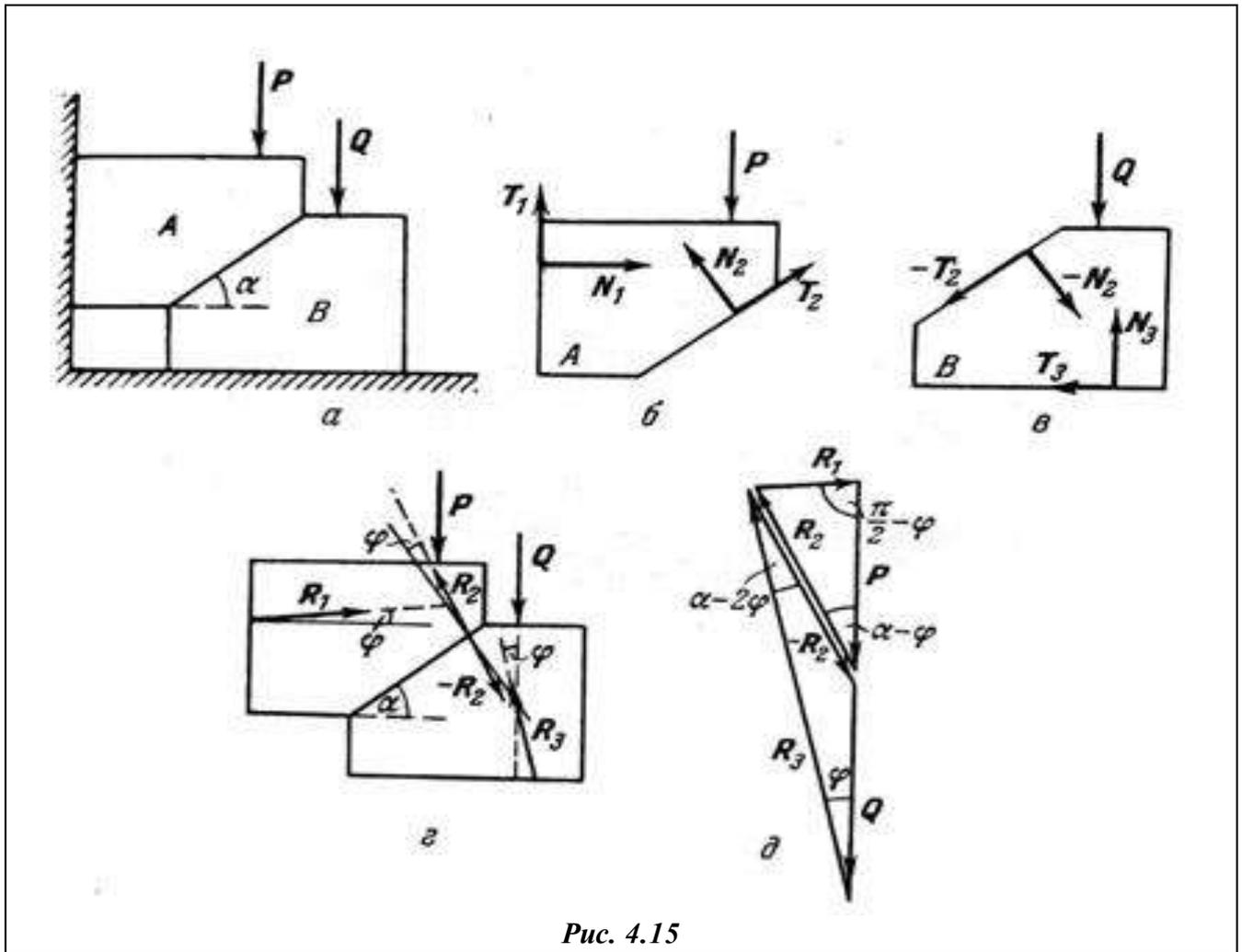


Рис. 4.15

Решив эту систему уравнений равновесия, найдем

$$P = fQ \frac{2f \sin \alpha + (1 - f^2) \cos \alpha}{(1 - f^2) \sin \alpha - 2f \cos \alpha}$$

или, после подстановки $f = \operatorname{tg} \varphi$ и тригонометрических преобразований,

$$P = Q \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi)}.$$

Отсюда видно, что решение существует, если $\alpha > 2\varphi$. Таким образом, условие равновесия лестницы, образованной двумя призмами, будет

$$P \leq Q \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi)}.$$

Эта задача может быть решена и графически.

Если заменить касательную и нормальную составляющую реакции в каждом случае одним вектором (рис. 4.15_е):

$$R_1 = N_1 + T_1,$$

$$\pm R_2 = \pm N_2 \pm T_2,$$

$$R_3 = N_3 + T_3,$$

то к каждой из призм будет приложено три силы (см. рис. 4.15 з) и можно воспользоваться теоремой о трех силах. Графическое решение — комбинация двух замкнутых силовых треугольников представлено на рис. 4.15д.

Задача имеет решение только при $\alpha > 2\varphi$. Это учтено на рис. 4.15з, где угол α начерчен достаточно большим.

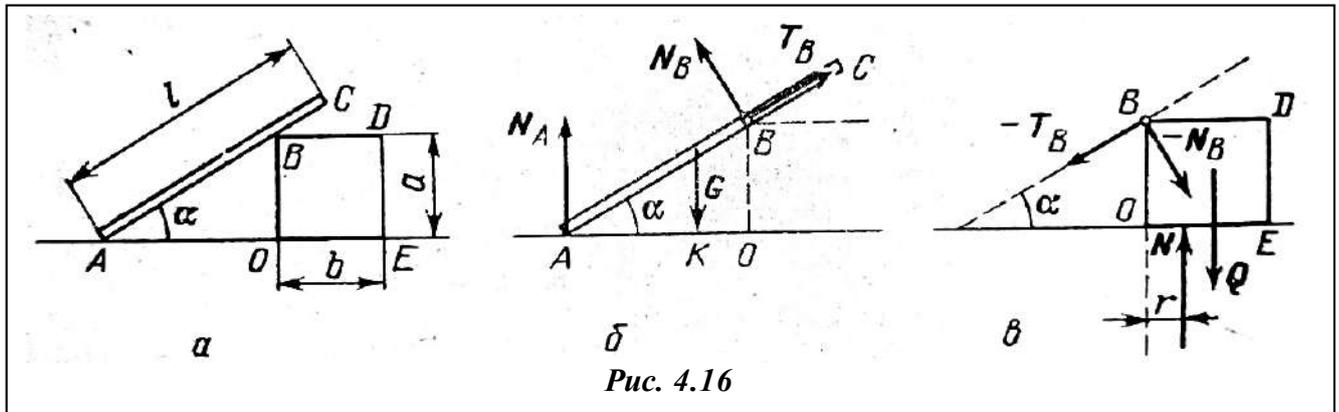


Рис. 4.16

Задача 4.10. Однородный стержень AC длиной l и весом G опирается концом A на гладкую горизонтальную плоскость, а промежуточной точкой B на прямоугольную призму, стоящую на той же гладкой плоскости. Угол трения между стержнем и призмой равен φ .

Определить, какой вес должна иметь призма, чтобы система была в равновесии. Стержень составляет с горизонтом угол α . Размеры призмы известны (рис. 4.16а).

Решение. Рассмотрим равновесие стержня и призмы в отдельности. Отбросив мысленно горизонтальную плоскость и призму, заменим их действие на стержень реакциями. На стержень действуют (рис. 16б): вес G , нормальная реакция гладкой плоскости N_a , нормальная реакция призмы N_B , касательная реакция призмы T_B (сила трения). Составим уравнение моментов относительно точки A :

$$-G \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha + N_B \cdot \frac{a}{\sin \alpha} = 0,$$

откуда получим

$$N_B = \frac{Gl}{2a} \cos \alpha \cdot \sin \alpha.$$

Рассмотрим, предельное равновесие призмы, отбросив мысленно пол и стержень. На призму действуют (рис. 4.16 в): вес Q , давление стержня — N_B , сила трения — T_B и нормальная реакция N_0 плоскости. Где следует приложить равнодействующую нормальной реакции плоскости?

Правее силы Q она не может быть приложена, так как относительно такой точки не будет выполнено равенство нулю суммы моментов всех сил. Значит, точка приложения реакции лежит на левой половине отрезка OE . Крайнее возможное положение ее, соответствующее критическому равновесию, в точке O , когда призма может начать поворачиваться вокруг ребра O . На рис. 4.16в изображены силы в положении критического равновесия.

Горизонтальная составляющая нормального давления — N_B на призму не должна превышать по модулю горизонтальной составляющей силы трения T_ϕ в предельном положении равновесия. Это условие может быть записано так:

$$T_B \cos \alpha \geq N_B \sin \alpha.$$

При этом знак неравенства следует понимать в том смысле, что **сила трения** не достигает своего максимального значения и, следовательно, равновесие системы не будет нарушено.

Подставив в это неравенство максимальное значение T_B , равное $N_B \cdot \operatorname{tg} \varphi$, получим

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot N_B \cos \alpha \geq N_B \sin \alpha, \quad \operatorname{tg} \varphi \geq \operatorname{tg} \alpha,$$

т.е.

$$\varphi \geq \alpha$$

Составим уравнение моментов сил, приложенных к призме, относительно точки O :

$$T_B \cdot \alpha \cdot \cos \alpha - N_B \cdot \alpha \cdot \sin \alpha - Q \frac{b}{2} = 0.$$

Подставив предельное значение **силы трения**

$$T_B = N_B \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

и значение N_B , найденное ранее, в предыдущее, равенство, получим

$$\alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \alpha \frac{Gl}{2\alpha} \cos \alpha \sin \alpha - \frac{Gl}{2\alpha} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \alpha \sin \alpha - Q \frac{b}{2} = 0.$$

Отсюда найдем

$$Q = \frac{Gl}{b} (\operatorname{tg} \varphi \cos \alpha - \sin \alpha) \cos \alpha \sin \alpha = \frac{Gl}{2b \cos \varphi} (\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha) \cdot \sin 2\alpha,$$

или окончательно

$$Q = \frac{Gl}{2b \cos \varphi} \sin(\varphi - \alpha) \sin 2\alpha.$$

Из этой формулы следует, что задача имеет решение при $\varphi \geq \alpha$, ибо в противном случае вес призмы получится отрицательным, что невозможно. Чем ближе угол наклона стержня к углу трения, тем более легкой может быть призма; в случае когда $\alpha = \varphi$, даже невесомая призма удерживается в равновесии.

Задача 4.11. Квадратный ящик весом Q находится в покое на горизонтальном негладком полу. **Коэффициент трения** между полом и ящиком равен f . Через ящик перекинут трос, закрепленный своими концами в O и O_1 . Ветви троса образуют с полом углы 30° и 60° .

Пренебрегая трением между ящиком и тросом, определить натяжение троса, при котором ящик будет оставаться в покое (рис. 4.17а).

Решение. Рассмотрим равновесие ящика (рис. 4.17б). На ящик действует одна активная сила — вес Q , приложенная в центре и направленная по вертикали вниз. На ящик наложены две связи — трос и пол. Отбрасывая мысленно эти связи, заменим их действие реакциями. Так как трение между ящиком и тросом отсутствует, то натяжение троса T будет везде одинаковым.

Натяжение троса будет действовать на ящик по направлениям OA и O_1B (рис. 4.17а). Разложим реакцию пола на нормальную реакцию N и касательную реакцию F , являющуюся силой трения.

Рассмотрим равновесие ящика как свободного тела, находящегося под действием пяти сил, указанных на рисунке. Составим уравнения равновесия, приравняв нулю сумму проекций всех сил па оси x и y

$$T \cos 60^\circ - T \cos 30^\circ + F = 0, \quad (4.57)$$

$$N - Q - T \sin 60^\circ - T \sin 30^\circ = 0. \quad (4.58)$$

Кроме того, имеем зависимость между силой трения и нормальным давлением (по модулю равным нормальной реакции), а именно:

$$F = fN. \quad (4.59)$$

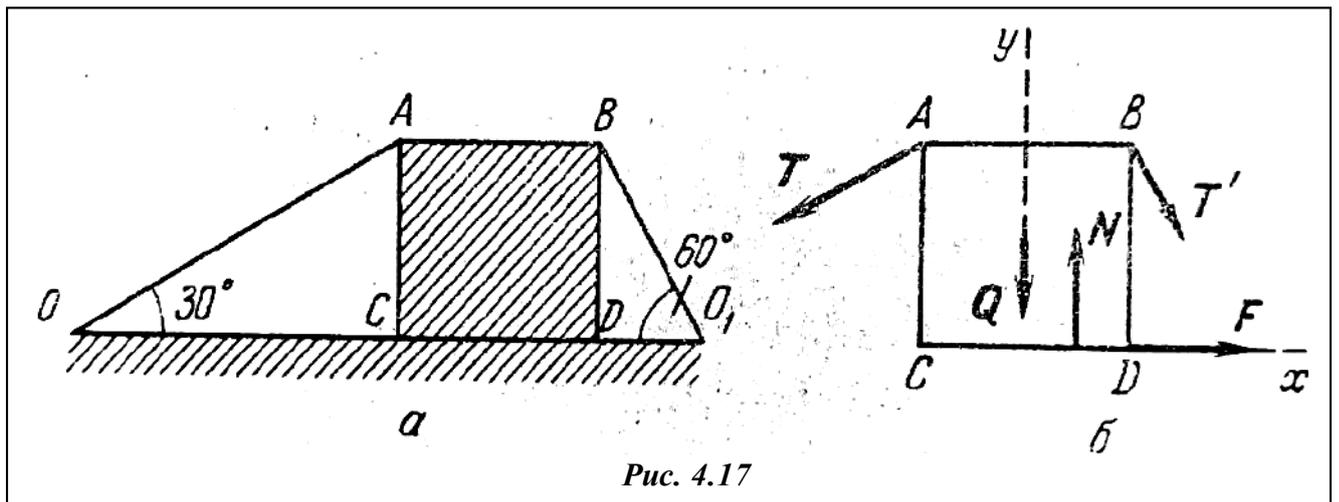


Рис. 4.17

Из (4.58) находим

$$N = Q + T(\sin 60^\circ + \sin 30^\circ). \quad (4.60)$$

Подставляя это значение в (4.59) и затем в (4.57), имеем

$$T(\cos 60^\circ - \cos 30^\circ) + f[Q + T(\sin 60^\circ + \sin 30^\circ)] = 0.$$

$$(4.61)$$

Решая уравнение (4.61) относительно неизвестного T , находим натяжение троса в предельном случае

$$T = \frac{fQ}{\cos 30^\circ - \cos 60^\circ - f(\sin 60^\circ - \sin 30^\circ)} = \frac{2fQ}{\sqrt{3} - 1 - f(\sqrt{3} + 1)}.$$

Ящик будет находиться в покое при

$$T \leq \frac{2fQ}{\sqrt{3} - 1 - f(\sqrt{3} + 1)}.$$

Задача 4.12. Два цилиндра с радиусами r_1 и r_2 и весами P_1 и P_2 опираются на горизонтальный пол и вертикальную стену так, что прямая O_1O_2 , соединяющая центры цилиндров, образует угол φ с горизонтом.

Коэффициенты трения; между первым цилиндром и горизонтальным полом f_1 между

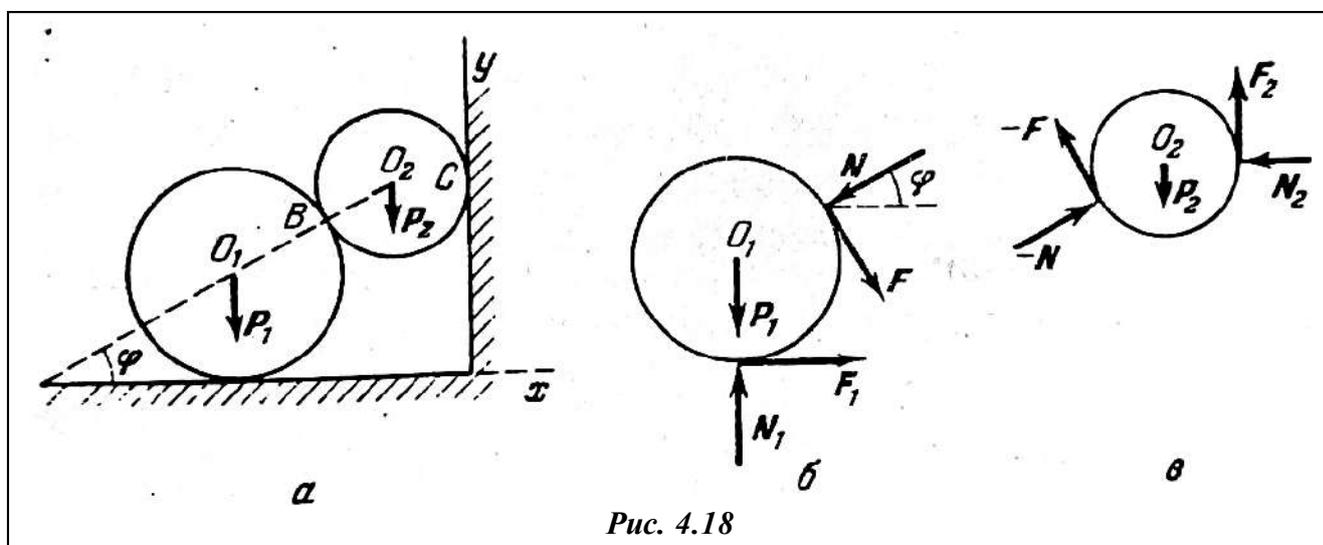


Рис. 4.18

вторым цилиндром и вертикальной стеной f_2 и между цилиндрами f .

Определить минимальные значения этих коэффициентов, при которых система может находиться в равновесии, а также нормальные реакции пола, стены и реакции между цилиндрами.

Решение. Рассмотрим равновесие каждого из цилиндров в отдельности (рис. 4.18б и в), отбросив мысленно пол, стену и другой цилиндр, заменив их действие реакциями. Каждую реакцию разложим на нормальную составляющую и силу трения. Тогда первый цилиндр можно рассматривать как свободное твердое тело, находящееся в равновесии под действием пяти сил: веса, двух нормальных реакций и двух сил трения (рис. 4.18б). Аналогично рассматривается равновесие второго цилиндра (рис. 4.18в). Силы трения направлены по касательным, проведенным к цилиндрам в точках соприкосновения в сторону, противоположную возможному движению цилиндра.

Составим уравнения равновесия для первого цилиндра:

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{kx} &= F_1 - N \cos \varphi + F \sin \varphi = 0, \\
\Sigma F_{ky} &= N_1 - P_1 - N \sin \varphi - F \cos \varphi = 0, \\
\Sigma_{m_{o_1}}(F_k) &= F_1 r_1 - F r_1 = 0.
\end{aligned}
\tag{4.62}$$

Уравнения равновесия для второго цилиндра будут и

$$\begin{aligned}
\Sigma F_{kx} &= N \cos \varphi - N_2 - F \sin \varphi = 0, \\
\Sigma F_{ky} &= N \sin \varphi - P_2 + F_2 + F \cos \varphi = 0, \\
\Sigma_{m_{o_2}}(F_k) &= F_2 r_2 - F r_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{4.63}$$

К этим уравнениям равновесия следует добавить зависимости предельных сил трения от нормального давления

$$F_1 = f_1 N_1, \quad F = f N, \quad F_2 = f_2 N_2. \tag{4.64}$$

Решив совместно систему из девяти уравнений (4.62) — (4.64), найдем

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{P_2 \cos \varphi}{P_1(1 + \sin \varphi + \cos \varphi) + P_2(1 + \sin \varphi)}, & N_1 &= P_1 + P_2 \frac{1 + \sin \varphi}{1 + \sin \varphi + \cos \varphi}, \\
f_2 &= 1, & N_2 &= \frac{P_2 + \cos \varphi}{1 + \sin \varphi + \cos \varphi}, \\
f &= \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, & N_1 &= P_2 \frac{1 + \sin \varphi}{1 + \sin \varphi + \cos \varphi}.
\end{aligned}$$

Полученные значения коэффициентов трения являются минимальными; если они будут превышать эти величины, то равновесие системы сохранится, а силы трения при этом не будут достигать своих предельных значений.

5. Задача о равновесии при наличии трения

а) общие сведения

При рассмотрении равновесия идеальных механических систем, предполагая, что поверхности соприкасающихся тел абсолютно гладкие, и всякое трение между соприкасающимися телами отсутствует, а сами тела абсолютно твердые. Такие предположения лишь приближенно соответствуют действительности. В частности, в реальных задачах невозможно полностью исключить влияние сил трения. Применение же законов статики к решению практических задач о равновесии механических систем без учета сил трения может привести к результатам, мало соответствующим действительности.

Силы трения существенно отличаются от всех других сил. Они возникают в тех случаях, когда активные силы способны создать относительное движение соприкасающихся тел. Не останавливаясь подробно на вопросах о происхождении и физической природе сил трения, ограничимся лишь изучением некоторых их свойств и той роли, которую они играют при исследовании равновесия и движения механических систем.

Силы трения мы определяем в соответствии с законами Амонтона—Кулона. Это предположение согласуется с экспериментальными данными.

Аналитический метод решения задач при наличии сил трения сохраняется таким же, как при отсутствии сил трения, но из-за того, что силы трения не определяются однозначно, условия равновесия выражаются неравенствами. Это говорит о том, что при наличии трения существует не одно, а целое множество смежных положений равновесия исследуемой системы. Задача о равновесии сводится к отысканию границ области равновесия.

Рассматривая абсолютно твердые и идеально гладкие тела, мы предполагали, что два тела, находящиеся в равновесии, могут соприкасаться друг с другом в одной точке и свободно скользить одно относительно другого. Такое предположение противоречит опытным данным. Реальные тела не являются ни абсолютно твердыми, ни абсолютно гладкими. В действительности соприкосновение тел никогда не происходит в одной точке, ибо соприкасающиеся тела испытывают деформации и, как бы малы ни были последние, соприкосновение тел происходит по некоторой площадке, размерами которой обычно можно пренебречь.

Рассмотрим два твердых тела A и B , находящихся в соприкосновении, и пусть O — точка контакта (рис. 5.1). Мгновенное движение тела B относительно тела A всегда может быть сведено к мгновенно-поступательному движению с относительной скоростью v_o точки O тела B и мгновенно-вращательному движению тела B с относительной угловой скоростью ω , линия действия которой проходит через точку O . Вектор ω можно представить в виде суммы двух векторов:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

причем ω_1 лежит в общей касательной плоскости (π), а ω_2 — ортогонален к плоскости (π). Вектор ω_1 будем называть скоростью качения, а вектор ω_2 — скоростью вращения. Мгновенное движение тела B относительно тела A теперь можно представить как совокупность трех движений: скольжения, качения и вращения.

Совокупность действующих на находящееся в равновесии тело B активных сил может быть приведена к одной результирующей силе \mathbf{F} , линия действия которой проходит через точку O , и паре сил с моментом \mathbf{m} . Действие этой системы сил уравновешивается силами реакций со стороны тела A , которые таким образом сводятся к результирующей силе \mathbf{R} , линия действия которой совпадает с линией действия силы \mathbf{F} , и результирующей паре с моментом \mathbf{m}_1 (рис. 5.2), удовлетворяющих условиям:

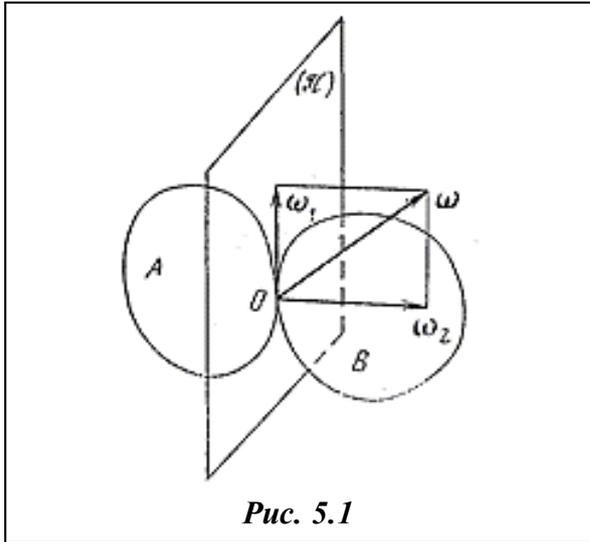


Рис. 5.1

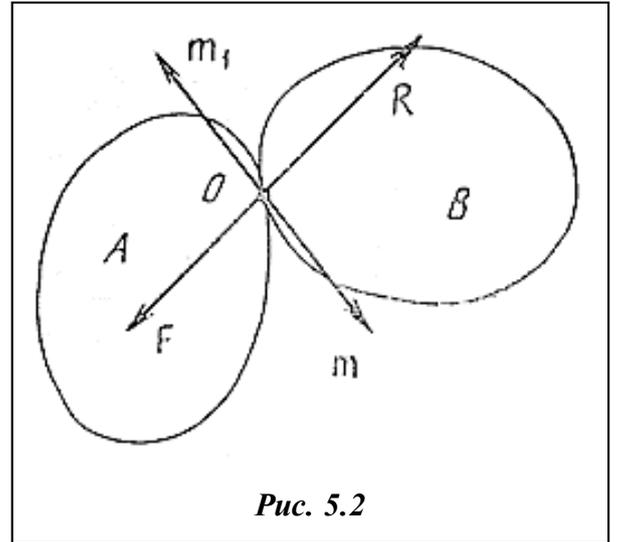


Рис. 5.2

$$F+R=0, \quad m+m_1=0.$$

Разложим силу \mathbf{R} и момент пары \mathbf{m}_1 на составляющие, расположенные в плоскости (π) и ортогональные к ней

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\tau + \mathbf{R}_n, \quad \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_{1\tau} + \mathbf{m}_{1n}$$

Составляющую \mathbf{R}_n , направленную по нормали к соприкасающейся плоскости (π) , назовем нормальной реакцией. Эта сила препятствует взаимному проникновению тел. Составляющую \mathbf{R}_τ , лежащую в плоскости (π) , будем называть силой трения скольжения или просто трением скольжения. Эта сила препятствует проскальзыванию тела B по телу A . Составляющую \mathbf{m}_{1n} , ортогональную к плоскости (π) и препятствующую верчению тела, назовем парой трения верчения. Наконец, составляющую $\mathbf{m}_{1\tau}$, параллельную плоскости (π) и препятствующую качению тела, назовем парой трения качения. Заметим, что влияние пар $\mathbf{m}_{1\tau}$ и \mathbf{m}_{1n} вообще очень мало по сравнению с влиянием сил \mathbf{R}_n и \mathbf{R}_τ , поэтому сначала рассмотрим те задачи, в которых этими парами можно пренебрегать.

Хотя реальные тела не являются абсолютно твердыми и в общем случае касание тел A и B происходит по некоторой площадке, тем не менее в ряде задач можно пренебречь размерами этой площадки и можно с достаточной степенью точности считать тела A и B абсолютно твердыми, а их касание происходящим в одной точке. Кроме этого, будем предполагать, что со стороны тела B на тело A действует рассмотренная выше система сил.

Пусть тело S под действием активных сил находится в равновесии на поверхности S_1 , касаясь последней в точке A (рис. 5.3). Действующая на тело S со стороны поверхности S_1 полная реакция \mathbf{R} складывается из нормальной реакции \mathbf{N} и силы трения F_{TP} . Направление последней заранее неизвестно, а максимальное значение, определенное в соответствии с законом Амонтона—Кулона, $F_{TP} = fN$, где f — коэффициент трения скольжения. Угол φ между направлениями полной реакции \mathbf{R} и нормальной реакции \mathbf{N} никогда не превосходит угла трения ω_m , который определяется из условия

$$\operatorname{tg} \omega_m = \frac{fN}{N} = f.$$

Для равновесия тела S необходимо, чтобы уравнивались все силы, действующие на тело S . Последнее возможно лишь в случае, когда все действующие на тело силы приводятся к одной равнодействующей силе \mathbf{F} , линия действия которой проходит через точку A , по величине равной силе реакции \mathbf{R} и противоположной по направлению. Таким образом, сила \mathbf{F} должна «прижимать» тело S к поверхности S_1 и образовывать с нормалью к поверхности S_1 угол, меньший угла трения.

Эти необходимые условия оказываются и достаточными, так как если они выполнены, то равнодействующую силу \mathbf{F} можно разложить на две составляющие: нормальную \mathbf{P} и касательную \mathbf{Q} (рис. 5.4). Сила \mathbf{P} уравнивается силой нормальной реакции \mathbf{N} , так что $N = P$. Сила $Q = P \operatorname{tg} \varphi$, где $\varphi \leq \varphi_m$, не может вызывать скольжение тела S по поверхности S_1 , поскольку она остается меньше максимальной силы трения

$$F_{TP} \leq fN = P \operatorname{tg} \varphi_m.$$

Можно придать условиям равновесия геометрическую интерпретацию. Для этого рассмотрим конус вращения с углом при вершине $2\varphi_m$, вершина которого совпадает с точкой A , а ось направлена по нормали к поверхности S_1 . Необходимые и достаточные условия равновесия сводятся к тому, что равнодействующая активных сил проходит через точку A и лежит внутри этого конуса. Рассмотренный конус принято называть **конусом трения**.

С л е д с т в и я . 1. Равнодействующая активных сил, проходящая внутри конуса трения, не может вызвать движения тела, как бы велика она ни была.

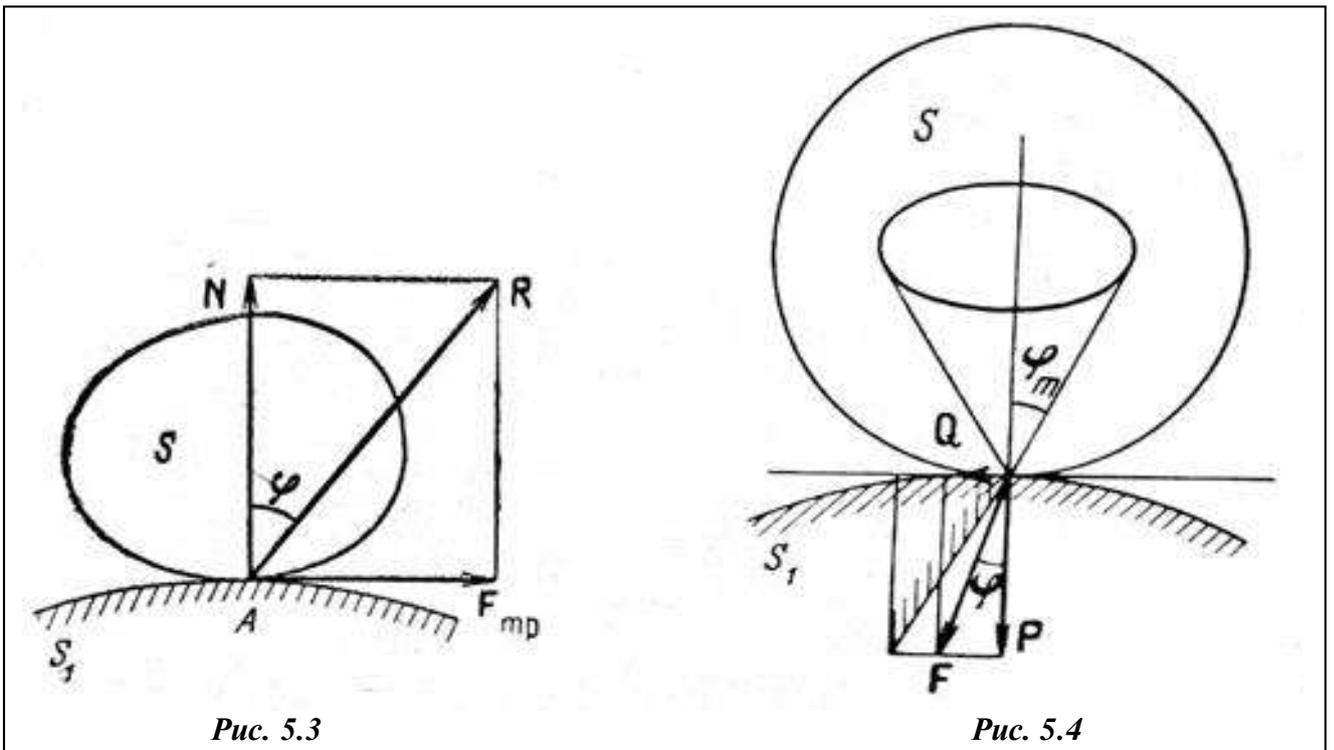


Рис. 5.3

Рис. 5.4

Как бы ни была мала равнодействующая активных сил, не лежащая внутри конуса

трения, она не может быть уравновешена силами реакции и сообщает движение телу.

Замечание. Коэффициент трения зависит от направления касательной к поверхности S_1 так что конус трения вообще не является прямым круговым конусом.

Пример 5.1. Тяжелая материальная точка находится на шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. 5.5). Найти условия равновесия точки.

Решение. Точка будет находиться в равновесии, лишь когда линия действия силы тяжести проходит внутри угла трения, т. е. при выполнении неравенства $\varphi_m \geq \alpha$.

Пример 5.2. Тяжелая однородная палочка AB длиной $2l$ может скользить своими концами по шероховатой окружности (угол трения равен φ_m), плоскость которой вертикальна (рис. 5.6). Определить условия равновесия палочки.

Решение. На палочку действуют три силы: сила тяжести и реакции в точках A и B , расположенные внутри соответствующих углов трения. Под действием трех сил палочка будет находиться в равновесии, если эти силы пересекаются в одной точке, а силовой треугольник замкнут.

Построим в точках A и B углы трения φ_m . Получим часть плоскости $S_1 S S_2 S'$ заключенную внутри того и другого угла. Первое из условий равновесия может быть выполнено лишь в случае, когда линия действия силы тяжести пересекает фигуру $S_1 S S_2 S'$. Аналитически это условие можно записать в виде

$$x_{s1} \leq x_c \leq x_{s2}, \quad (a)$$

где x_c — абсцисса центра палочки. Обозначив через β угол между горизонтальным радиусом окружности и прямой OA , соединяющей центр окружности с концом палочки, а через α — угол между прямой AO и палочкой, полученное условие представим в виде

$$\begin{aligned} -l \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + 2l \frac{\sin(a-\varphi)}{\sin 2a} \cos(\beta+\varphi) &\leq -\frac{l}{\cos \alpha} \cos \beta + l \cos(a-\beta) \leq \\ &\leq -l \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + 2l \frac{\sin(a+\varphi)}{\sin 2a} \cos(\beta-\varphi), \end{aligned}$$

откуда окончательно получаем условия равновесия

$$2 \frac{\sin(a-\varphi)}{\sin 2a} \cos(\beta+\varphi) \leq \cos(a-\beta) \leq 2 \frac{\sin(a+\varphi)}{\sin 2a} \cos(\beta-\varphi). \quad (б)$$

Условия (б) определяют не одно положение равновесия, а целую область возможных положений равновесия. Условия эти являются и достаточными. В самом деле, перенеся активную силу mg в произвольную точку заштрихованной области, мы заметим, что эта сила всегда может быть уравновешена силами реакции.

В частном случае при $\varphi = a$ условие (б) становится особенно наглядным

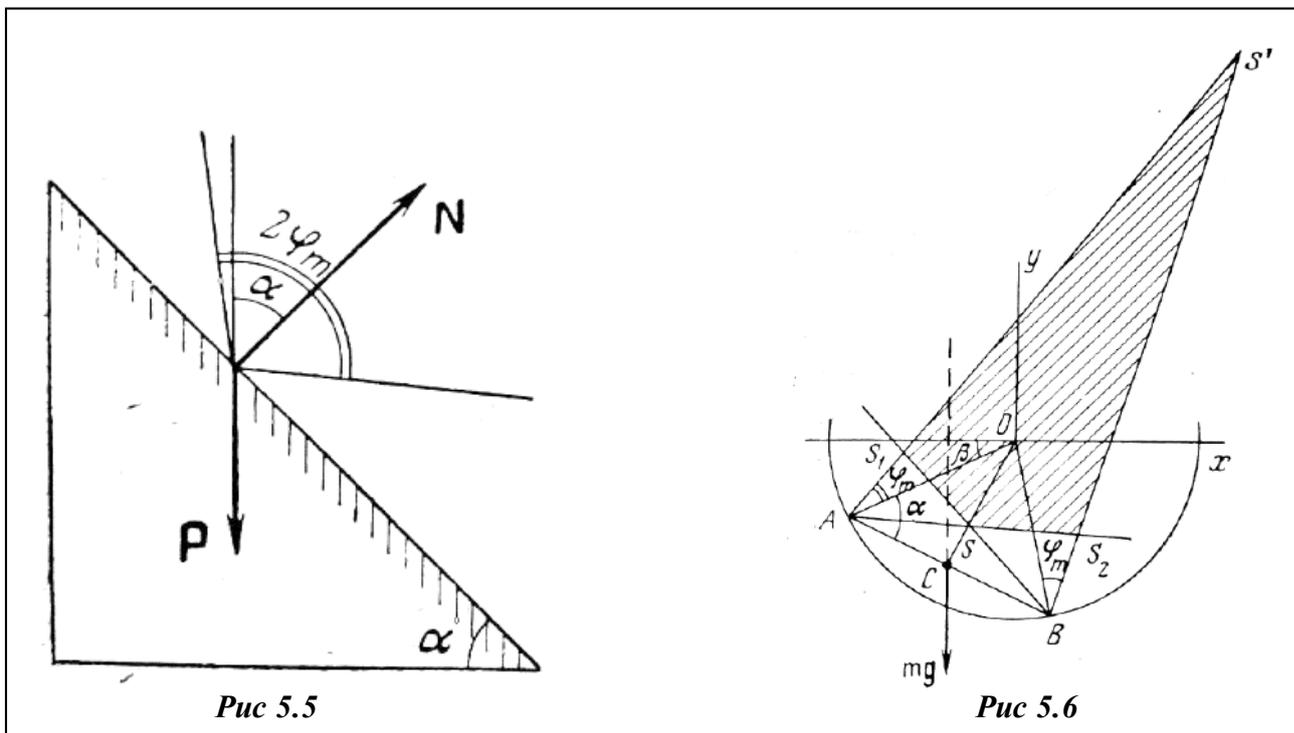
$$0 \leq \cos(a-\beta),$$

откуда следует

$$-\frac{\pi}{2} \leq a - \beta \leq \frac{\pi}{2},$$

или

$$a - \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq a + \frac{\pi}{2},$$



Если трение отсутствует, т. е. $\varphi = 0$, условие (b) сводится к уравнению

$$\frac{2 \sin a}{\sin 2a} \cos \beta = \cos(a - \beta),$$

которое преобразуется к виду

$$\sin(a - \beta) = 0.$$

Последнее уравнение определяет единственное положение равновесия, соответствующее горизонтальному положению палочки.

При наличии сил трения задача определения положения равновесия и сил реакций однозначно не разрешается

б) Трение качения и его коэффициента

Трение качения возникает при качении одного тела по другому. Возникновение трения качения можно объяснить тем, что поверхности соприкасающихся тел не являются абсолютно

твердыми и несколько деформируются. Законы трения качения, основанные на этом предположении Кулоном и Мореном, представляют грубое приближение к действительности.

Рассмотрим, например, задачу о качении колеса по прямолинейному горизонтальному рельсу, предполагая, что кроме силы тяжести на колесо действует еще некоторая система сил, расположенных в плоскости колеса. Действующие силы вообще несколько деформируют как само колесо, так и рельс, и для возможности качения по рельсу необходимо приложить некоторое усилие. Возникающее сопротивление свободному качению обычно называют **трением качения**. Но такое объяснение явления трения связано с отказом от гипотезы абсолютно твердого тела, что вызывает необходимость пересмотра основных принципов статики твердого тела, в основе которых лежит эта гипотеза. Поэтому, сохраняя гипотезу абсолютно твердого тела, будем предполагать, что соприкосновение тел происходит в одной точке и всякие деформации отсутствуют. Обозначим через A точку касания (рис. 5.7). Приводя систему сил, действующих на колесо, к точке A , в общем случае получим результирующую силу \mathbf{F} и пару сил с моментом \mathbf{m} , перпендикулярным к плоскости колеса. Раскладывая силу \mathbf{F} на \mathbf{F}_1 , нормальную к рельсу, и \mathbf{F}_2 , параллельную рельсу, заметим, что сила \mathbf{F}_2 будет вызывать скольжение колеса, а пара — его вращение. Для отсутствия скольжения, как мы уже могли видеть, достаточно выполнения неравенства

$$fF_1 \geq F_2,$$

где f — коэффициент трения скольжения. При выполнении этого условия колесо еще не будет находиться в равновесии, пока не уравновешена пара. Опыт показывает, что колесо не начнет катиться до тех пор, пока момент пары m не превзойдет некоторого предельного значения

$$m \leq \delta F_1.$$

Величина δ называется **коэффициентом трения качения**. Этот коэффициент не зависит от величины силы F и радиуса кривизны катящегося предмета, а зависит лишь от физических свойств соприкасающихся тел. Таким образом, мы вводим гипотезу, что кроме активных сил на твердое тело действуют нормальная сила реакции \mathbf{N} , уравновешивающая действие силы \mathbf{F}_1 сила трения скольжения, уравновешивающая действие силы \mathbf{F}_2 , и пара сил, называемая **парой трения качения**, которая уравновешивает пару с моментом \mathbf{m} . Для равновесия достаточно выполнения двух условий

$$fF_1 \geq F_2, \quad \delta F_1 \geq m.$$

В большинстве случаев трение качения оказывается значительно меньшим, чем трение скольжения, и при решении практических задач им часто можно пренебрегать.

в) Трении верчения и его коэффициента

Рассмотрим тяжелый шар, лежащий на горизонтальной плоскости и касающийся ее в точке C (рис. 5.8), так что CO — вертикальный радиус шара. Вращение шара вокруг вертикального радиуса называем **верчением**. Приводя систему активных сил, действующих на шар, к точке C , в общем случае получим результирующую силу, проходящую через точку C , и пару с моментом m .

Предположим, что момент пары параллелен вертикальному радиусу шара. Раскладывая результирующую силу на составляющие, одна из которых, \mathbf{F}_2 , параллельна горизонтальной

плоскости, а вторая, F_1 , ей ортогональна, заметим, что сила F_1 уравнивается нормальной реакцией плоскости, сила F_2 — силой трения скольжения, и для полного равновесия шара необходимо еще уравновесить пару.

Как известно если момент пары, стремящейся привести шар в вращение, достаточно мал, то шар вращаться не начнет. Действию активной пары в этом случае препятствует некоторая пара сил реакции, называемая **трением вращения**.

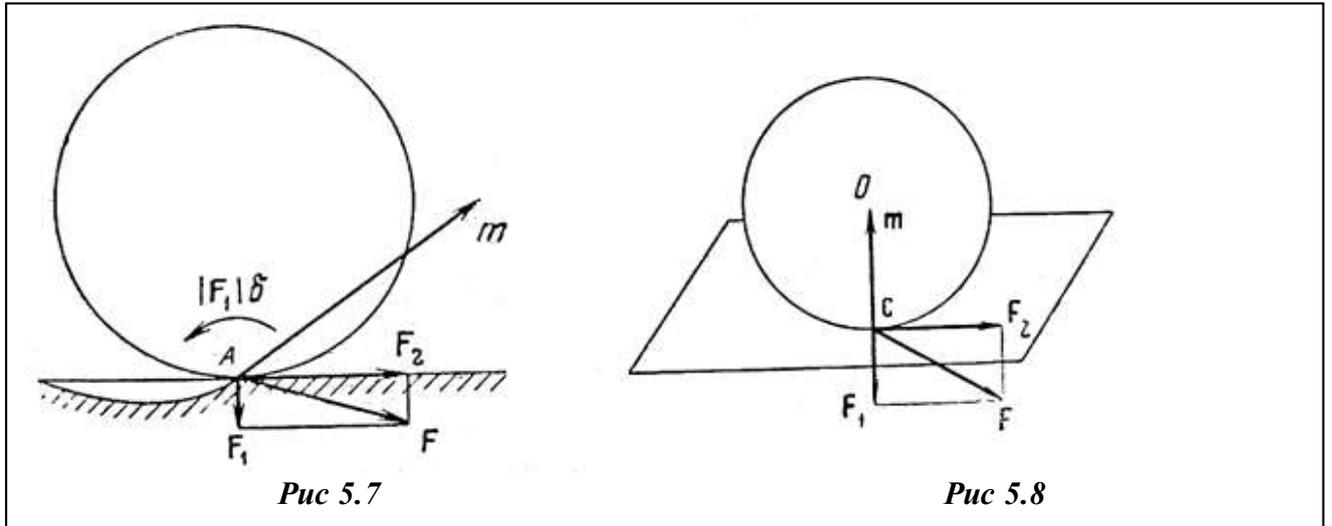


Рис 5.7

Рис 5.8

Предельный момент трения вращения можно представить в виде произведения некоторого коэффициента k , называемого **коэффициентом трения вращения** и определяемого экспериментальным путем, на нормальную составляющую результирующей активной силы, т. е. kF_1 . Коэффициент трения вращения обычно величина малая, в 5—10 раз меньшая коэффициента трения качения. Условия равновесия сводятся к двум неравенствам:

$$fF_1 \geq F_2, \quad kF_1 \geq m.$$

6. Равновесие тела при наличии трения

а) Трение скольжения

Если два тела I и II (рис. 6.1) взаимодействуют друг с другом, соприкасаясь в точке A , то всегда реакцию \mathbf{R}_A , действующую, например, со стороны тела II и приложенную к телу I , можно разложить на две составляющие: \mathbf{N}_A , направленную по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел в точке A , и \mathbf{T}_A , лежащую в касательной плоскости. Составляющая \mathbf{N}_A называется *нормальной реакцией*, сила \mathbf{T}_A называется *силой трения скольжения* — она препятствует скольжению тела I по телу II . В соответствии с аксиомой 4 (третьим законом Ньютона) на тело II со стороны тела I действует равная по модулю и противоположно направленная сила реакции. Ее составляющая, перпендикулярная касательной плоскости, называется *силой нормального давления*. Сила трения $T_A=0$, если соприкасающиеся поверхности идеально гладкие. В реальных условиях поверхности шероховаты и во многих случаях пренебречь силой трения нельзя.

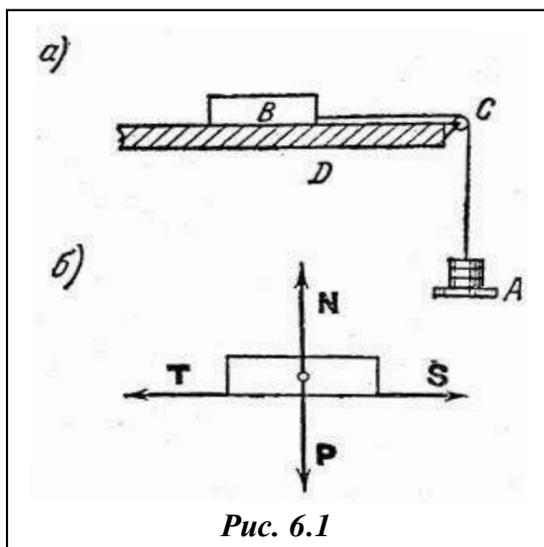


Рис. 6.1

Рассмотрим основные свойства сил трения (рис. 6.2, а.) К телу B , находящемуся на неподвижной плите D , присоединена перекинутая через блок C нить, свободный конец которой снабжен опорной площадкой A . Если площадку A постепенно нагружать, то с увеличением ее общего веса будет возрастать натяжение нити S , которое стремится сдвинуть тело вправо. Однако пока общая нагрузка не слишком велика, сила трения T будет удерживать тело B в покое. На рис. 6.2, б изображены действующие на тело B силы, причем через P обозначена сила тяжести, а через N — нормальная реакция плиты D .

Если нагрузка недостаточна для нарушения покоя, то справедливы следующие уравнения равновесия:

$$N - P = 0, \quad (6.1)$$

$$S - T = 0. \quad (6.2)$$

Отсюда следует, что $N = P$ и $T = S$. Таким образом, пока тело находится в покое, сила трения остается равной силе натяжения нити S . Обозначим через T_{\max} силу трения в критический момент процесса нагружения, когда тело B теряет равновесие и начинает скользить по плите D . Следовательно, если тело находится в равновесии, то

$$T \leq T_{\max}. \quad (6.3)$$

Максимальная сила трения T_{\max} зависит от свойств материалов, из которых сделаны тела, их состояния (например, от характера обработки поверхности), а также от нормального давления N . Максимальная сила трения приблизительно пропорциональна нормальному давлению, т. е.

$$T_{\max} = fN. \quad (6.4)$$

Это соотношение носит название *закона Амонтона—Кулона*

Безразмерный коэффициент f называется *коэффициентом трения скольжения*. Его значение в широких пределах не зависит от площади соприкасающихся поверхностей, но зависит от материала и степени шероховатости соприкасающихся поверхностей. Значения коэффициентов трения можно найти в справочных таблицах.

Неравенство (6.3) можно записать в виде

$$T \leq fN. \quad (6.5)$$

Случай равенства в (6.5) отвечает максимальному значению силы трения. Это значит, что силу трения можно вычислять по формуле $T = fN$ только в тех случаях, когда заранее известно, что имеет место критический случай. Во всех же других случаях силу трения следует определять из уравнений равновесия.

Задача 6.1. Тяжелая плита AB силы тяжести P , длины l опирается на идеально гладкую стенку OB и шероховатый пол OA (рис. 6.3, а). Определить, при каких углах наклона плиты возможно ее равновесие, если коэффициент трения плиты и пола равен f . Составим уравнение равновесия

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= N_B - T_A = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= N_A - P = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_{Az}(F_k) &= P \frac{l}{2} \cos a - N_B l \sin a = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, в соответствии с условием (6.5) должно быть

$$T_A \leq fN_A.$$

Решая уравнения, получим

$$N_B = T_A = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} a, \quad N_A = P.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ctg} a \geq \frac{1}{2f}.$$

Критическое значение угла a^* определяется из уравнения

$$\operatorname{ctg} a^* = \frac{1}{2f}.$$

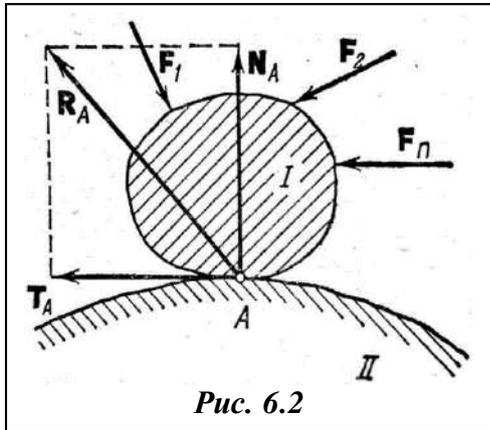


Рис. 6.2

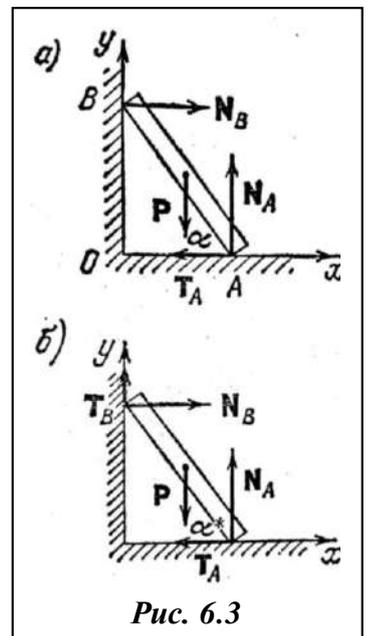


Рис. 6.3

Определим критическое значение угла α^* с учетом трения плиты о стенку, если соответствующий коэффициент трения равен также f .

Силовая схема изображена на рис. 6.3, б. В общем случае система является статически неопределимой, так как содержит четыре неизвестные реакции, и мы располагаем только тремя уравнениями равновесия (при заданном угле λ нельзя найти силы трения и нормальные давления). Однако в критическом состоянии силы трения пропорциональны соответствующим нормальным давлениям, и это позволяет решить задачу. Для этого состояния имеем два уравнения для сил трения

$$T_A = fN_A, \quad T_B = fN_B$$

и три уравнения равновесия

$$N_B - T_A = 0, \quad N_A + T_B - P = 0, \quad \frac{Pl}{2} \cos \alpha^* - N_B l \sin \alpha^* - T_B l \cos \alpha^* = 0.$$

В этих пяти уравнениях содержатся четыре неизвестные реакции и неизвестное критическое значение угла α^* . Решая эту систему уравнений, находим

$$\operatorname{tg} \alpha^* = \frac{1-f^2}{2f}, \quad N_A = \frac{P}{1+f^2}, \quad T_A = \frac{Pf}{1+f^2}, \quad N_B = \frac{Pf}{1+f^2}, \quad T_B = \frac{Pf^2}{1+f^2}.$$

Последние четыре выражения относятся к критическому состоянию, но если

$$T_A < fN_A, \quad T_B < fN_B, \tag{6.5}$$

то задача становится статически неопределенной (для ее решения необходимо привлечь какие-либо соображения, выходящие за рамки наших представлений о твердых телах).

Задача 6.2. На шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтальной плоскостью, находится тело веса $P = 20$ Н (рис. 6.4, а). Тело удерживается на плоскости тросом AB , весом которого можно пренебречь. Определить силу трения T между телом и плоскостью и минимальное натяжение троса S при двух значениях коэффициента трения: $f_1 = 0,8$ и $f_2 = 0,2$.

На тело действуют четыре силы: активная сила тяжести P , сила трения T , нормальная составляющая реакции плоскости N и реакция троса S (рис. 6.4, б). Составим условия равновесия тела:

$$\sum_{k=1}^4 F_{kx} = P \sin \alpha - T - S = 0, \quad \sum_{k=1}^4 F_{ky} = N - P \cos \alpha = 0, \quad T \leq fN.$$

Отсюда найдем

$$S = P \sin \alpha - T, \quad N = P \cos \alpha, \quad T \leq fP \cos \alpha,$$

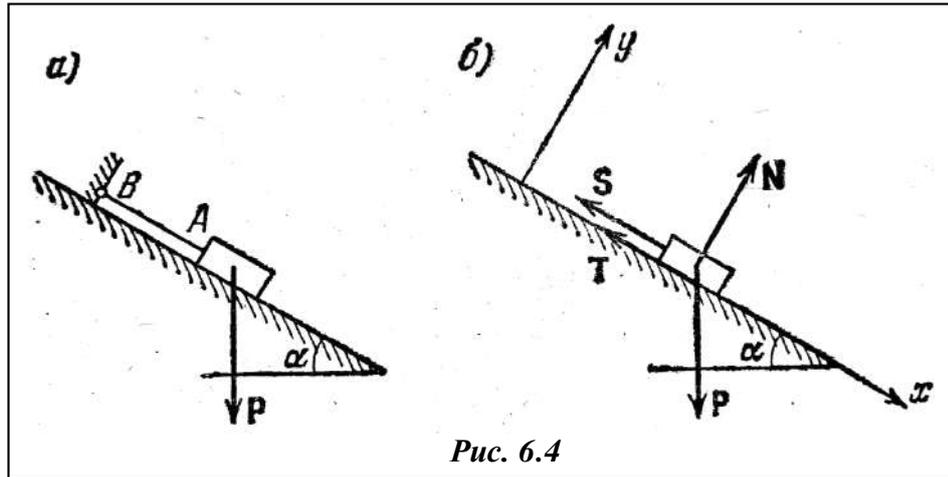


Рис. 6.4

или,

$$S = 10 - T, \quad T \leq 17,3f.$$

Для первого случая $f_1 = 0,8$ будем иметь: $T \leq 13,8$ Н. При отсутствии троса ($S = 0$) получим $T = 10$ Кг. Так как при этом условие $T \leq 13,8$ Н не нарушается, то это означает, что при $f_1 = 0,8$ тело будет находиться в равновесии за счет одной силы трения $T = 10$ Кг.

Пусть теперь $f_1 = 0,2$. Тогда должно выполняться условие $T \leq 17,3 \cdot f_2 = 3,46$ Кг. При отсутствии троса ($S = 0$) это неравенство находится в противоречии с первым уравнением ($T = 0$). Это означает, что при отсутствии троса тело начало бы скользить вниз. Поэтому при $f_1 = 0,2$, сила трения достигает своего максимального значения, равно $3,46$ Кг, а натяжение троса будет: $S = 10 - T = 6,54$ Кг. Итак

$$\begin{aligned} \text{при } f_1 = 0,8: & \quad T = 10 \text{ Кг}, \quad S = 0; \\ \text{при } f_2 = 0,2: & \quad T = 3,46 \text{ Кг}, \quad S = 6,54 \text{ Кг}. \end{aligned}$$

Задача 6.3. К однородной прямоугольной призме веса G , находящейся на шероховатой горизонтальной плоскости, прислонена под углом α однородная балка силы шести P и длины $2l$ (рис. 6.5, а). Коэффициент трения между балкой и плоскостью равен f_1 , а между призмой и плоскостью f_2 . Пренебрегая силами трения между балкой и призмой и поперечными размерами балки, определить: 1) условия равновесия всей системы; 2) условия, при которых призма останется в покое, а балка начнет двигаться; 3) условия, при которых конец A балки останется в покое, а призма начнет скользить по плоскости влево или опрокидываться вокруг ребра E .

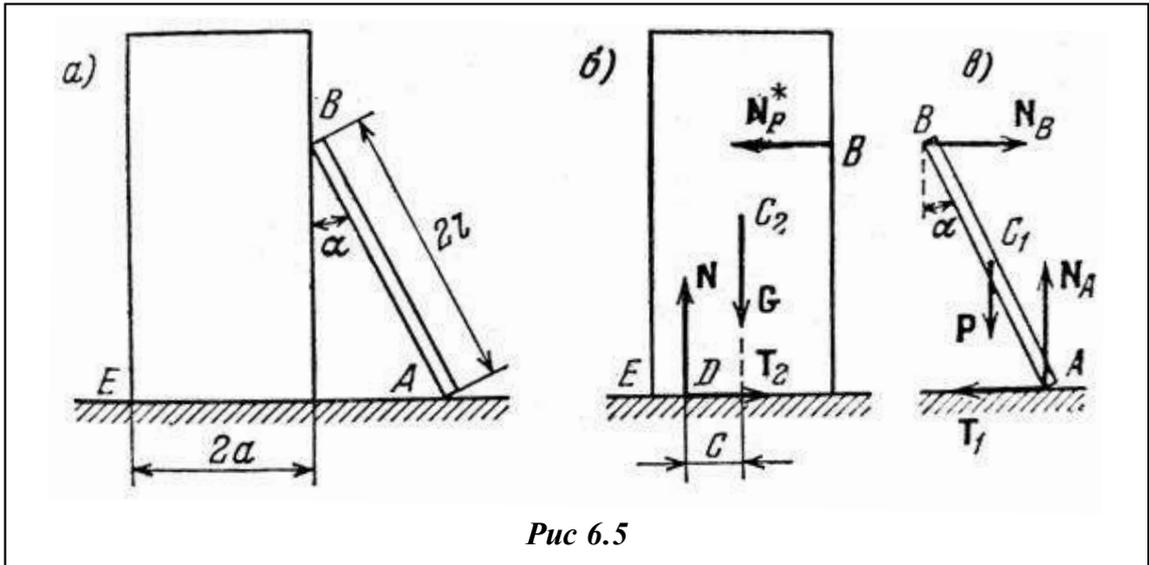


Рис 6.5

Расчленим систему и изобразим все силы (активные и реакции связей), действующие на призму (рис.6.5, б) и балку (рис. 6.5, в). На призму действуют сила тяжести G , сила давления N_B^* балки на призму, равнодействующая сил нормального давления плоскости N , приложенная в некоторой точке D , и сила трения T_2 . На балку действуют сила тяжести P , сила давления N_B призмы на балку, нормальная составляющая N_A реакции плоскости и сила трения T_1 . Модули сил N_A и N_B равны между собой

Будем считать что вся система находится в покое, и составим условия равновесия балки:

$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx} = N_B - T_1 = 0, \quad \sum_k F_{ky} = N_A - P = 0, \\ \sum_k M_{Az}(F_k) = Pl \sin a - N_B \cdot 2l \cos a = 0, \quad T_1 \leq f_1 N_A. \end{aligned}$$

Из уравнений находим

$$T_1 = N_B, \quad N_A = P, \quad N_B = \frac{P}{2} \operatorname{tga}.$$

Внеся значения T_1 и N_A в неравенство, получим условия равновесия балки

$$\operatorname{tga} < 2f_1.$$

Составим теперь условия равновесия призмы:

$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx} = T_2 - N_B^* = 0, \quad \sum_k F_{ky} = N - G = 0, \\ \sum_k M_{Dz}(F_k) = N_B^* \cdot 2l \cos a - G \cdot c = 0, \quad T_2 \leq f_2 N. \end{aligned}$$

Из уравнений находим

$$T_2 = N_B^*, \quad N = G, \quad N_B^* = \frac{c}{2l \cos a} G.$$

Число c неизвестно, но его можно найти из равенства $N_B^* = N_B$, или

$$\frac{P}{2} \operatorname{tga} = \frac{c}{2l \cos a} G;$$

Отсюда

$$c = \frac{P}{G} l \sin a.$$

Так как точка приложения силы N , точка D , не может находиться левее точки E , то $c \leq a$, или

$$\frac{P}{G} l \sin a \leq a,$$

что дает еще одно условие равновесия:

$$\sin a \leq \frac{a G}{l P}.$$

Это неравенство равносильно требованию, чтобы под действием силы N_B^* призма не опрокинулась вокруг ребра E (его можно получить из условия, чтобы момент силы N_B^* относительно точки E не превосходил по модулю момента силы G относительно той же точки).

Потребуем теперь, чтобы призма не скользила по плоскости, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$T_2 \leq f_2 N. \quad (a)$$

Имеем: $T_2 = N_B^* = N_B l / 2P \operatorname{tga}$, $N = G$. Подставляя это в неравенство (a), получаем

$$\operatorname{tga} \leq 2f_2 \frac{G}{P}.$$

Таким образом, вся система будет находиться в покое, если угол a , удовлетворяет трем условиям:

$$\operatorname{tga} \leq 2f_1, \quad \sin a \leq \frac{a G}{l P}, \quad \operatorname{tga} \leq 2f_2 \frac{G}{P}. \quad (6.6)$$

Если будет нарушено только первое из этих неравенств, т. е. при

$$\operatorname{tga} > 2f_1, \quad \sin a \leq \frac{a G}{l P}, \quad \operatorname{tga} \leq 2f_2 \frac{G}{P},$$

призма останется в покое, а балка начнет двигаться.

Если будет нарушено только второе условие (6.5), т. е. при

$$\operatorname{tg} a \leq 2f_1, \quad \sin a > \frac{a G}{l P}, \quad \operatorname{tg} a \leq 2f_2 \frac{G}{P},$$

точка A балки останется в покое, а призма начнет опрокидываться вокруг ребра E .

Наконец, если будет нарушено только третье условие (6.6), т. е. при

$$\operatorname{tg} a \leq 2f_1, \quad \sin a \leq \frac{a G}{l P}, \quad \operatorname{tg} a > 2f_2 \frac{G}{P},$$

точка A балки снова останется в покое, но призма начнет скользить по плоскости влево.

Рассмотрим тело, находящееся на шероховатой поверхности. Будем считать, что в результате действия активных сил и сил реакции тело находится в предельном равновесии. На рис. 6.6, a показана предельная реакция R и ее составляющие N и T_{\max} (в положении, изображенном на этом рисунке, активные силы стремятся сдвинуть тело вправо,

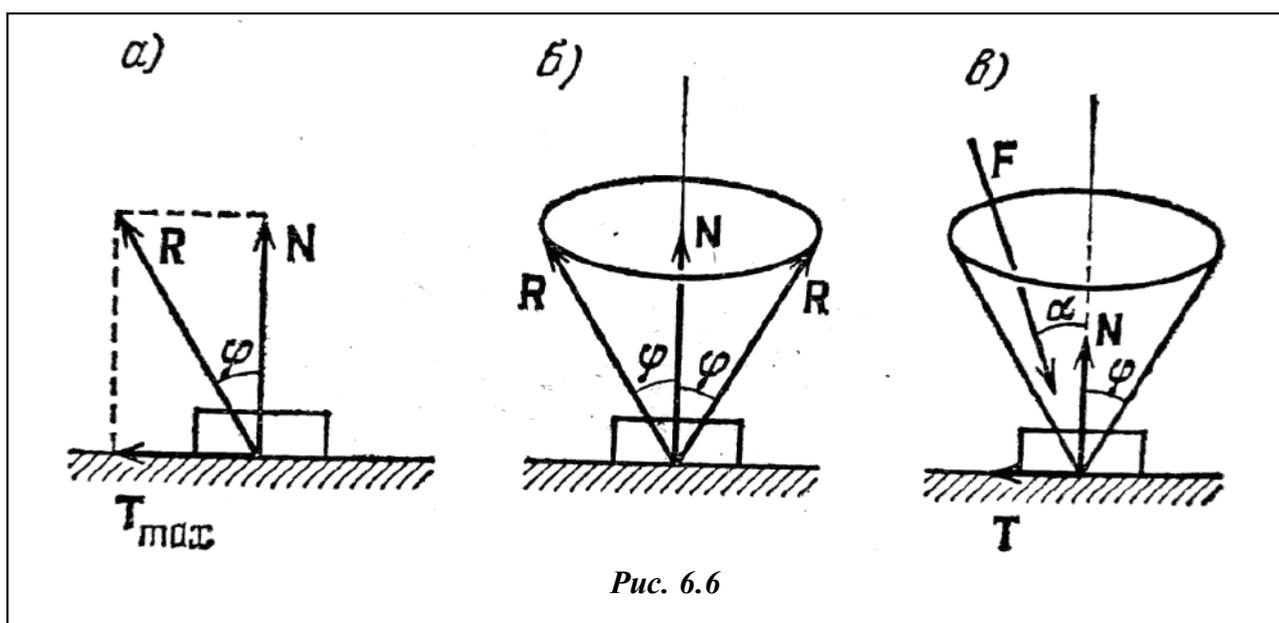


Рис. 6.6

максимальная сила трения T_{\max} направлена влево). Угол φ между предельной реакцией R и нормалью к поверхности называется углом трения. Найдем этот угол. Из рис. 6.6, a имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T_{\max}}{N},$$

или,

$$\operatorname{tg} \varphi = f. \quad (6.7)$$

Из этой формулы видно, что вместо коэффициента трения можно задавать угол трения

В зависимости от действия активных сил направление предельной реакции может меняться. Геометрическое место всех возможных направлений предельной реакции R образует коническую поверхность — конус трения (рис. 6.6, б). Если коэффициент трения f во всех направлениях одинаков, то согласно формуле (6.7) конус трения будет круговым. В тех случаях, когда коэффициент трения f зависит от направления возможного движения тела, конус трения не будет круговым.

Рассмотрим теперь случай, когда активные силы, действующие на тело, приводятся к

одной равнодействующей \mathbf{F} , составляющей угол λ с нормалью к поверхности (рис. 6.6, в). Такая сила оказывает двойное действие: во-первых, ее нормальная составляющая F_n определяет нормальную составляющую N реакции поверхности и, следовательно, предельную силу трения $T_{\max} = fN$, а, во-вторых, ее касательная составляющая F_t стремится эту силу преодолеть. Если увеличивать модуль силы \mathbf{F} , то пропорционально будут возрастать обе составляющие. Отсюда можно заключить, что состояние покоя или движения тела не зависит от модуля силы \mathbf{F} и определяется только углом α — чем меньше этот угол, тем меньше тенденция к нарушению равновесия.

Для аналитического решения задачи составим условия равновесия тела

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = T - F \sin a = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = N - F \cos a = 0, \quad T \leq fN.$$

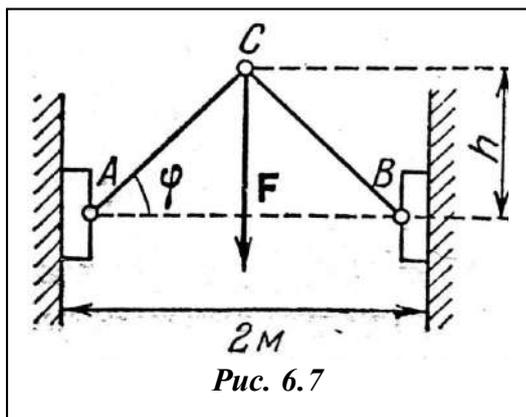
Из уравнений найдем $T = F \sin a$, $N = F \cos a$ и, подставляя их в неравенство, получим

$$\operatorname{tga} \leq f,$$

или, учитывая (6.7), $\operatorname{tga} \leq \operatorname{tg}\varphi$. Следовательно, при равновесии тела

$$a \leq \varphi.$$

Это означает, что если равнодействующая активных сил находится внутри конуса трения, то увеличением ее модуля нельзя нарушить равновесие тела; для того чтобы тело начало движение, необходимо (и достаточно), чтобы равнодействующая активных сил F находилась вне конуса трения.



Задача 6.4. Найти условие, определяющее размер h самотормозящегося механизма, изображенного на рис. 6.7. Необходимо, чтобы приложенная к узлу C сила F не могла вызвать скольжения ползунков A и B по вертикальным направляющим. Коэффициент трения $f = 0,2$, расстояние между направляющими 2 м.

Сила F вызывает сжатие наклонных стержней, и последние передают на ползунки силы давления под некоторым углом к горизонтальной плоскости. Для того чтобы скольжение отсутствовало, ось каждого стержня должна располагаться внутри соответствующего конуса трения. А это имеет место при выполнении условия

$$\operatorname{tg}\varphi < 0,2.$$

Но $h = 1 \cdot \operatorname{tg}\varphi$, поэтому $h < 0,2$ м.

б) Трение гибких тел. Формула Эйлера

Пусть трос охватывает неподвижный круглый цилиндр. Требуется определить силу натяжения троса P , достаточную для уравновешивания силы Q , приложенной ко второму

концу троса, если между тросом и цилиндром имеется трение (рис. 6.8, а).

Благодаря трению сила P может быть во много раз меньше, чем сила Q . Задача будет статически определенной лишь в том случае когда рассматривается критическое состояние и

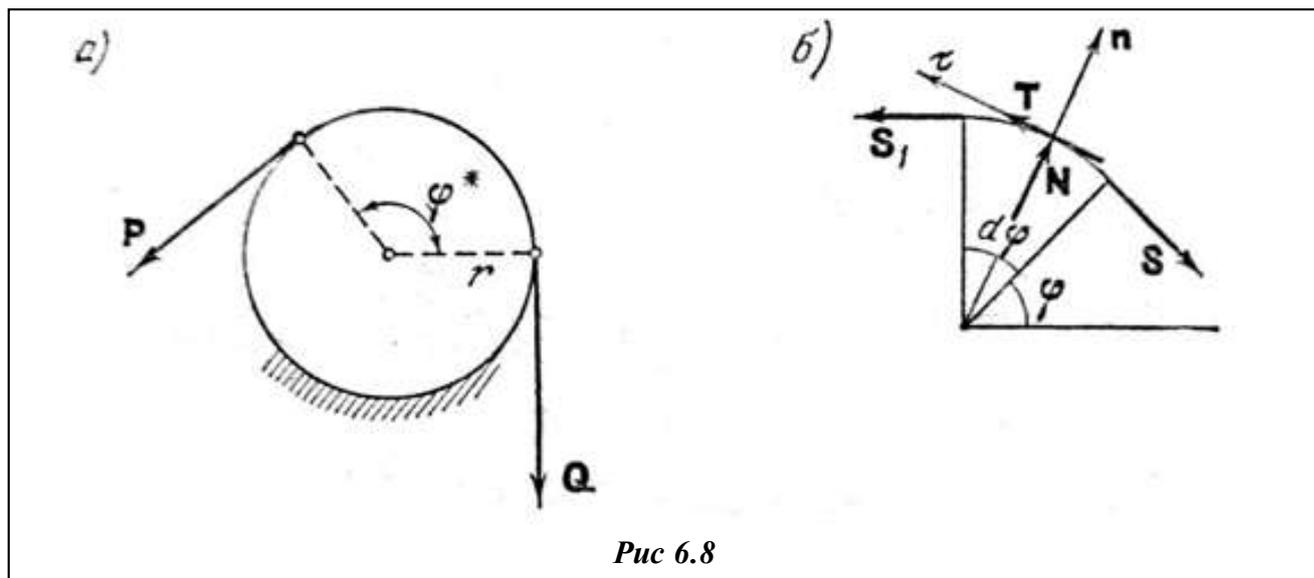


Рис 6.8

силы трения пропорциональны соответствующим нормальным давлениям.

Нормальное давление и сила трения непрерывно распределены по всей длине охвата φr . Обозначим через N и T значения этих сил, отнесенных к единице длины троса. Эти силы, конечно, являются функциями полярного угла φ , определяющего положение элемента, т.е. $N = N(\varphi)$, $T = T(\varphi) = fN(\varphi)$. Натяжение троса в любой его точке на цилиндре также является функцией φ , т. е.

$$S = S(\varphi).$$

Выделим элемент троса длины $ds = r d\varphi$. На этот элемент действуют две реакции шкива: $T ds$ и $N ds$, а также две силы натяжения, S и $S_1 = S + dS$, приложенные к рассматриваемому элементу в точках рассечения (рис. 6.8, б).

Пренебрегая весом троса, запишем условия равновесия выделенного элемента троса, спроектировав силы на направления нормали (\mathbf{n}) и касательной (τ), взятые в середине элемента:

$$\sum_{k=1}^n F_{kn} = Nds - S_1 \frac{d\varphi}{2} - S \frac{d\varphi}{2} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k\tau} = Tds + S_1 - S = 0.$$

При составлении этих уравнений воспользуемся малостью угла $d\varphi$ и положим

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}, \quad \cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1.$$

Подставляя в уравнения равновесия вместо S_1 и ds их значения

$$S_1 = S + dS, \quad ds = rd\varphi,$$

получаем

$$Nr - S = 0, \quad Tr + \frac{dS}{d\varphi} = 0.$$

Первое из этих уравнений дает $S = Nr$, а так как $T = fN$, то второе уравнение можно переписать в виде

$$dS = -fSd\varphi,$$

или

$$\frac{dS}{S} = -fd\varphi.$$

Выполняя интегрирование в пределах от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi^*$, находим

$$\ln \frac{S^*}{S_0} = -f\varphi^*.$$

Здесь S_0 — натяжение в сечении $\varphi = 0$, равное модулю силы Q , S^* — натяжение в сечении $\varphi = \varphi^*$, равное модулю силы P . Следовательно,

$$\ln \frac{P}{Q} = -f\varphi^* \quad (6.8)$$

и, окончательно,

$$P = Qe^{-f\varphi^*}. \quad (6.9)$$

Эта формула (формула Эйлера) позволяет найти наименьшую силу P , способную уравновесить силу Q .

Можно поставить обратный вопрос: при каком значении P наступит скольжение троса против хода часовой стрелки, т. е. какая сила P способна преодолеть сопротивление трения вместе с силой Q ? Для ответа на этот вопрос нет необходимости заново повторять все выкладки; они останутся прежними с тем единственным различием, что сила трения на рис. 6.8, б изменит свое направление. Поэтому, изменяя знак при коэффициенте трения, получаем

$$P = Qe^{f\varphi^*}. \quad (6.10)$$

Таким образом, если сила P удовлетворяет неравенствам

$$Qe^{-f\varphi^*} \leq P \leq Qe^{f\varphi^*},$$

то трос будет находиться в равновесии.

Задача 6.5. Найти угол охвата φ цилиндра тросом, необходимый для того, чтобы удержать силой $P = 200 \text{ кГ}$ груз весом $Q = 200 \text{ кГ}$, если коэффициент трения $f = 0.2$.

По формуле (6.8) имеем

$$\ln \frac{200}{2000} = -0,2\varphi;$$

отсюда

$$\varphi = 11,5 < 2 \cdot 2\pi,$$

т. е. несколько меньше двух полных охватов.

Задача 6.6. К концу троса подвешен груз весом $Q = 200 \text{ кГ}$; угол охвата цилиндра тросом $\varphi = 11,5$. Найти силу, необходимую для подъема груза, если коэффициент трения $f = 0,2$.

В данном случае нужно воспользоваться формулой

$$P = Qe^{f\varphi} = 200e^{0,2 \cdot 11,5} \approx 20\,000 \text{ кГ}.$$

Сопоставляя этот результат с полученным в задаче 6.5, заключаем, что трос будет находиться в состоянии равновесия, если $200 \text{ Кг} \leq P \leq 20\,000 \text{ Кг}$. При $P < 200 \text{ Кг}$ начинается движение в сторону силы Q , а при $P > 20\,000 \text{ Кг}$ — движение в сторону силы P .

Задача 6.7. При причаливании судна матрос удерживает его с помощью каната, накинутого в форме восьмерки на причальные тумбы причем один конец каната A укреплен на судне, а второй конец каната B находится в руках матроса (рис. 6.9). Считая, что угол охвата каждой тумбы равен $5\pi/3$ (300°), определить, какое максимальное усилие P судна может выдержать матрос, прикладывая силу $Q = 500 \text{ Н}$ при одной, двух и трех уложенных канатных восьмерках, если коэффициент трения между канатом и причальными тумбами равен 0,2.

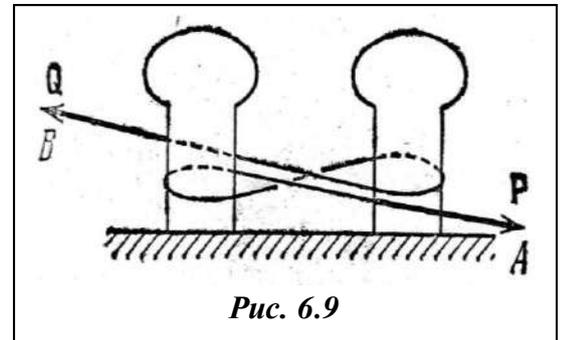


Рис. 6.9

При одной восьмерке общий угол охвата $\varphi_1 = (10/3)\pi$, а при двух и трех восьмерках соответственно $\varphi_2 = (20/3)\pi$ и $\varphi_3 = 10\pi$. Получаем

$$P_1 = 50e^{0,2(10/3)\pi},$$

или пользуясь таблицами показательных функций, находим (аналогично получены значения сил P_2 и P_3):

$$P_1 = 404 \text{ Кг}, \quad P_2 = 3270 \text{ Кг}, \quad P_3 = 26\,400 \text{ Кг}.$$

Таким образом, при трех уложенных восьмерках за счет сил трения между канатом и причальными тумбами один матрос может удержать судно, развивающее усилие в 26,4 тонны, т. е. в 528 раз больше силы, прикладываемой матросом.

в) Трение качения и его коэффициент. Момент трения качения

Рассмотрим цилиндр (каток), покоящийся на горизонтальной плоскости, когда на него действует горизонтальная активная сила S ; кроме нее, действуют сила тяжести P , а также

нормальная реакция N и сила трения T (рис. 6.10, а). При достаточно малом модуле силы S цилиндр остается в покое. Но этот факт нельзя объяснить, если удовлетвориться введением сил, изображенных на рис. 6.10, а. Согласно этой схеме равновесие невозможно, так как главный момент всех сил, действующих на цилиндр $M_{cz} = -Sr$, отличен от нуля, и одно из условий равновесия не выполняется.

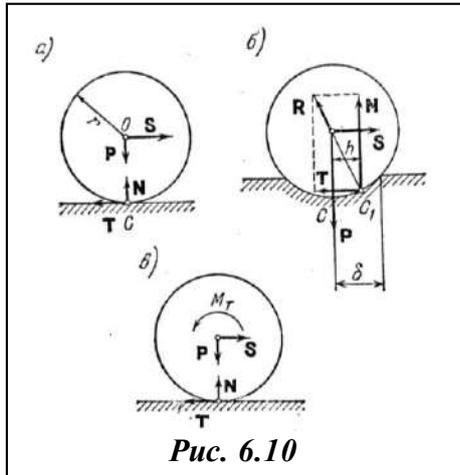


Рис. 6.10

Причина выявившегося несоответствия состоит в том, что мы пользуемся представлением об абсолютно твердом теле и предполагаем касание цилиндра с поверхностью происходящим по образующей. Для устранения отмеченного несоответствия теории с опытом необходимо отказаться от гипотезы абсолютно твердого тела и учесть, что в действительности цилиндр и плоскость вблизи точки деформируются и существует некоторая площадь соприкосновения конечной ширины. Вследствие этого в ее правой части цилиндр прижимается сильнее, чем в левой, и полная реакция R приложена правее точки C (см. точку C_1 на рис. 10, б).

Полученная схема действующих сил статически удовлетворительна, так как момент пары (S, T) может уравновеситься моментом пары (N, P) . Считая деформацию малой, заменим эту систему сил системой, изображенной на рис. 6.7, в. В отличие от первой схемы (рис. 6.10, а), к цилиндру приложена пара сил с моментом

$$M_T = Nh. \quad (6.11)$$

Этот момент называется **моментом трения качения**. Составим уравнения равновесия цилиндра:

$$\begin{aligned} S - T &= 0, \\ N - P &= 0, \\ -Sr + M_T &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Первые два уравнения дают $T = S$, $N = P$, а из третьего уравнения можно найти M_T . Затем из (6.11) определяем расстояние между точками C и C_1 :

$$h = \frac{Sr}{P}. \quad (6.13)$$

Как видно, с увеличением модуля активной силы S растет расстояние h . Но это расстояние связано с площадью поверхности контакта и, следовательно, не может неограниченно увеличиваться. Это значит, что наступит такое состояние, когда увеличение силы S приведет к нарушению равновесия. Обозначим максимально возможную величину h буквой δ . Величина δ пропорциональна радиусу цилиндра и различна для разных материалов.

Следовательно, если имеет место равновесие, то

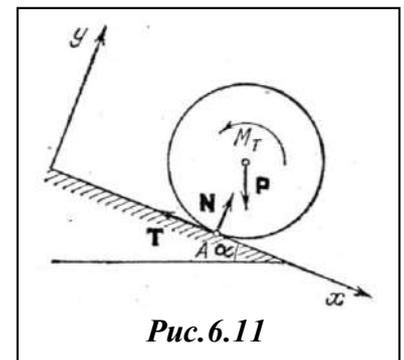


Рис. 6.11

выполняется условие

$$h \leq \delta. \quad (6.14)$$

Величина δ называется *коэффициентом трения качения*; она имеет размерность длины. Условие (6.14) можно также записать в виде

$$M_T \leq \delta N, \quad (6.15)$$

или, учитывая (6.12)

$$S \leq \frac{\delta}{r} N. \quad (6.15)$$

Максимальный момент трения качения $M_T^{\max} = \delta N$ пропорционален силе нормального давления.

В справочных таблицах приводится отношение коэффициента трения качения к радиусу цилиндра ($\lambda = \delta / r$) для различных материалов.

7. Трение и связи с трением

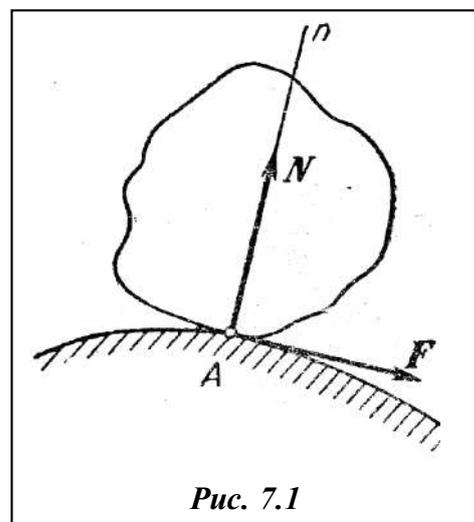
а) Трение скольжения, и его законы

Связь, которая развивает реакцию, направленную по нормали к поверхности (или линии), служащей связью, называется **идеальной связью** или связью без трения. Связь с трением, кроме нормальной реакции N , развивает еще тангенциальную реакцию F , лежащую в касательной плоскости, проведенной через точку A , в которой тело соприкасается с поверхностью, служащей связью (рис.7.1); если связью служит кривая, то тангенциальная реакция F направлена по касательной к этой кривой. В то время как нормальная реакция представляет собой давление связи на тело, тангенциальная реакция появляется благодаря **силе трения**.

Сила трения есть результат взаимодействия двух соприкасающихся под некоторым давлением тел. Эта сила возникает в точках соприкосновения, лежит в общей касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел и препятствует скольжению одного тела относительно другого. Трение такого рода носит название трения **скольжения**.

Трение между двумя соприкасающимися телами происходит прежде всего вследствие шероховатости их поверхностей и наличия сцепления у прижатых друг к другу тел.

Несмотря на то, что трение есть одно из самых распространенных явлений природы и встречается почти во всех задачах механики, точные законы трения до сих пор не установлены вследствие трудностей, связанных с выявлением полной физической картины возникновения силы трения. и с количественной оценкой всех факторов, от которых эта сила зависит. Поэтому практически при учете сил трения пользуются законами, которые носят в основном качественный характер и представляют собой некоторое приближение к действительности. Эти законы были установлены в результате опытов над трением, сделанных Амонтоном (1699 г.), и более точных исследований Кулона (1781 г.).



При рассмотрении явления трения следует различать статическое трение, имеющее место при относительном покое соприкасающихся тел, и трение движения, которое имеет место при относительном движении тел.

Установленные **законы трения скольжения при покое** можно сформулировать так:

1) Сила трения скольжения действует в общей касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел; численно сила трения имеет всякий раз то значение, которое необходимо для предотвращения относительного скольжения тел, но не может стать больше некоторой определенной предельной величины, т. е

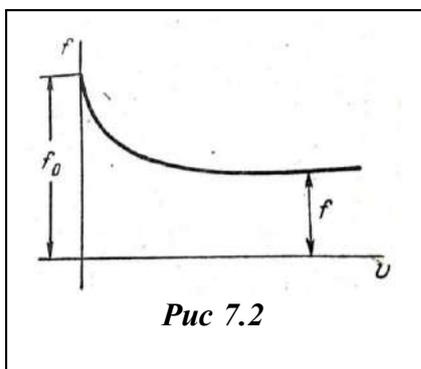
$$F \leq F_{\max}. \quad (7.1)$$

1) Величина предельной силы трения зависит от природы соприкасающихся тел и от возникающей при их взаимном давлении друг на друга нормальной реакции N и определяется равенством

$$F_{\max} = f_0 N, \quad (7.2)$$

где f_0 —отвлеченное число, называемое коэффициентом трения скольжения при покое (или статическим коэффициентом трения). Коэффициент f_0 зависит от материала, характера обработки и состояния (влажности, температуры и др.) трущихся поверхностей и определяется опытным путем.

3) Сила трения не зависит от площади контакта соприкасающихся при трении поверхностей.



Из равенств (7.1) и (7.2) следует, что

$$F \leq f_0 N. \quad (7.3)$$

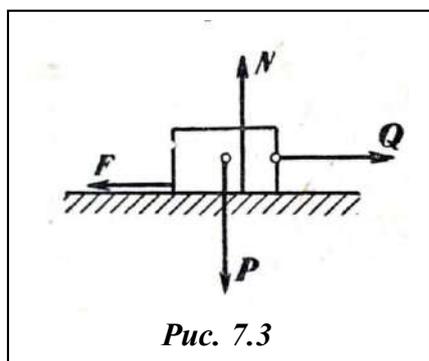
Представление о величине f_0 дают следующие данные: при трении дерева о дерево $f_0 = 0,4/0,7$, при трении металла о металл $f_0 = 0,15/0,25$.

При движении сила трения направлена в сторону, противоположную относительной скорости тела, а ее численная величина определяется равенством

$$F = fN, \quad (7.4)$$

где f — коэффициент трения скольжения при движении (или динамический коэффициент трения). Он также зависит от материала, степени обработки и состояния трущихся поверхностей и от скорости движения. Обычно с увеличением скорости величина f_0 сначала несколько бывает, а затем сохраняет почти постоянное значение (рис. 7.2). Исключение составляет, например, трение кожи о металл, при котором f_c с увеличением скорости несколько возрастает.

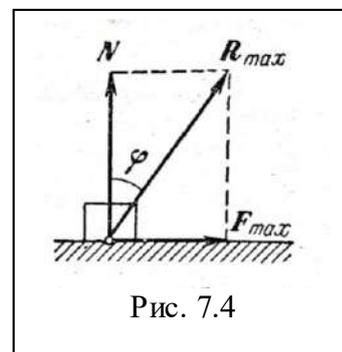
Пример 7.1. Пусть груз весом P лежит на горизонтальной плоскости (рис.7.3) и пусть статический коэффициент трения груза о плоскость равен f_0 . В данном случае $N=P$. Тогда,



если к грузу приложить горизонтальную силу Q , численно меньшую, чем $F_{\max} = f_0 P$, то груз останется в покое; при этом на него будет действовать сила трения, напряжение которой $F = Q < F_{\max}$. Чтобы сдвинуть груз, к нему надо приложить силу $Q_1 = f_0 N = f_0 P$. При движении с некоторой скоростью $v > 0$ сила трения станет равна $fP < f_0 P$ (когда $f < f_0$); поэтому если на груз будет продолжать действовать сила Q_1 то он будет двигаться ускоренно. Равномерное движение груз будет совершать, если действующая сила $Q = fP < Q_1$

б) Реакция связи с трением, Задачи

Полная реакция R связи с трением складывается геометрически из нормальной реакции N и перпендикулярной к ней силы трения F . Так как $F \leq F_{\max}$, то при данной величине N полная реакция может иметь разные численные значения и образовывать разные углы с



нормалью. Наибольшее значение R_{max} полная реакция имеет при $F = F_{max}$ (рис. 7.4). Образующий при этом реакцией R_{max} угол φ с нормалью (наибольший из всех возможных углов отклонения) называется углом трения. Как видно из рисунка, $F_{max} = N \operatorname{tg} \varphi$. Сравнивая этот результат с равенством (7.2), находим, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{max}}{N} = f_0. \quad (7.5)$$

Так как тело может перемещаться вдоль поверхности, реализующей связь, по любому направлению, то связь с трением может развить реакцию по всякому направлению, лежащему внутри конуса (вообще не кругового, если структура поверхности неоднородна), осью которого служит нормаль, а угол между осью и образующей равен углу трения φ (рис. 7.5).

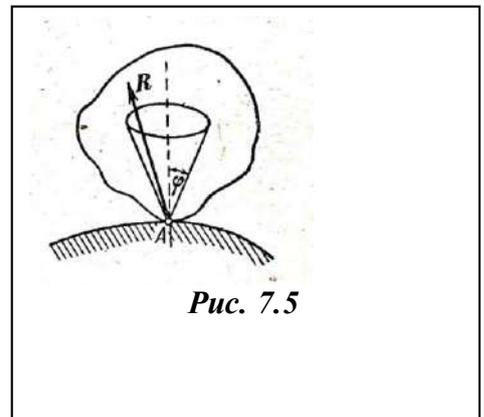


Рис. 7.5

Отсюда, следует, что для равновесия тела, касающегося шероховатой поверхности в точке A , необходимо, чтобы все силы, действующие на тело, привелись к равнодействующей, проходящей через точку A и лежащей внутри конуса трения.

Задачи. При определении условий равновесия тел с учетом трения можно встретиться с задачами двух типов: а) задачи, в которых рассматривается предельное положение равновесия и сила трения считается равной ее предельному значению (7.2); б) задачи, в которых отыскиваются все возможные положения равновесия и величина силы трения определяется неравенством (7.3).

В задачах второго типа решения получаются в виде неравенств, определяющих все множество значений искомых величин, при которых возможно равновесие (область равновесия).

Задача 7.1. Найти, при каком наибольшем угле наклона α (рис. 7.6) тяжелый груз, лежащий на наклонной плоскости, остается в равновесии, если коэффициент трения груза о плоскость равен f_0 .

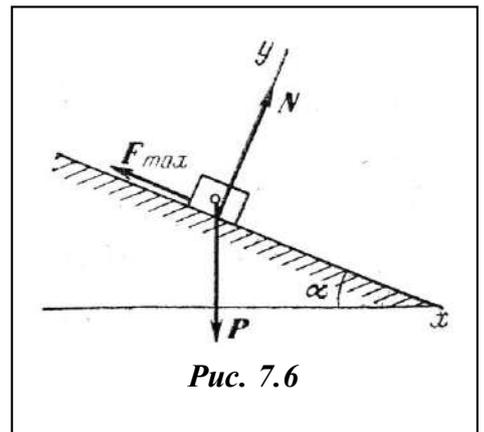


Рис. 7.6

На груз в рассматриваемом предельном положении действуют сила тяжести P , нормальная реакция N и предельная сила трения F_{max} . Составляя условия равновесия в проекциях на оси x и y будем иметь:

$$P \sin \alpha - F_{max} = 0, \quad (a)$$

$$N - P \cos \alpha = 0. \quad (б)$$

Из (б) находим $N = P \cos \alpha$. Тогда $F_{max} = f_0 N - f_0 P \cos \alpha$. Подставляя это значение в (а), получим $P(\sin \alpha - f_0 \cos \alpha) = 0$. Отсюда, согласно (7.5)

$$\operatorname{tg} \alpha = f_0 = \operatorname{tg} \varphi \text{ или } \alpha = \varphi.$$

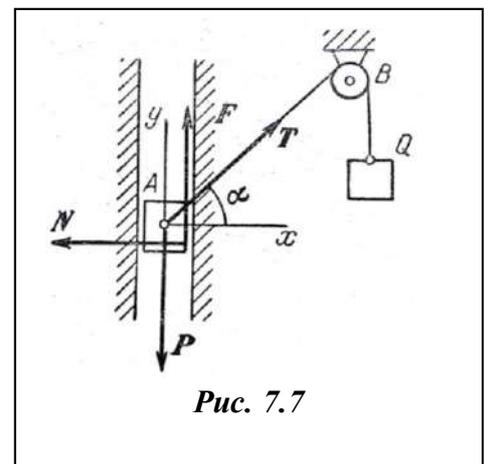


Рис. 7.7

Следовательно, наибольший угол наклона, при котором возможно равновесие, равен углу трения.

Если будем искать все углы a , при которых возможно равновесие, то тогда в уравнении (а) вместо F_{\max} будет стоять F и оно даст $F = P \sin a$.

Но в этом случае $F \leq fN$ или $F \leq f_0 P \cos a$ и мы получим, что $P \sin a \leq f_0 P \cos a$, откуда

$$\operatorname{tg} a \leq f_0 \text{ или } a \leq \varphi. \quad (7.6)$$

Следовательно, равновесие вообще возможно при любом угле наклона, меньшем угла трения или равном ему. Неравенство (в) определяет область равновесия.

Задача 7.2. К ползуну A весом P , который может скользить вдоль вертикальных направляющих (рис. 7.7), прикрепена нить, перекинута через блок B и несущая на конце груз весом Q . Коэффициент трения ползуна о направляющие равен f_0 . Зная угол a , определить, при каком соотношении между P и Q возможно равновесие. Трением в блоке пренебречь.

Рассматриваем равновесие ползуна, пренебрегая его размерами. На ползун действуют сила P , натяжение нити T , численно равное Q , нормальная реакция N и сила трения F , которая может быть направлена или вверх (когда $P > Q \sin \alpha$), или вниз (когда $P < Q \sin \alpha$). Составляя условия равновесия в проекциях на оси x и y , будем иметь:

$$T \cos a - N = 0, \quad T \sin a - P \pm F = 0. \quad (а)$$

Так как $T=Q$, то отсюда $N = Q \cos a$ и $F = \pm(P - Q \sin a)$. Но $F \leq f_0 N$ или $F \leq f_0 Q \cos a$. В результате приходим к двум неравенствам:

$$\begin{aligned} P - Q \sin a &\leq f_0 Q \cos a, \\ -(P - Q \sin a) &\leq f_0 Q \cos a, \end{aligned}$$

откуда находим:

$$(\sin a + f_0 \cos a) \geq \frac{P}{Q} \geq (\sin a - f_0 \cos a). \quad (б)$$

Так как $f_0 = \operatorname{tg} \varphi$, то неравенство (б) можно еще представить в виде

$$\frac{\sin(a + \varphi)}{\cos \varphi} \geq \frac{P}{Q} \geq \frac{\sin(a - \varphi)}{\cos \varphi}. \quad (в)$$

Полученный результат показывает, в каких границах можно изменять отношение P/Q , не нарушая равновесия (т. е. определяет область равновесия). При отсутствии трения ($f_0 = 0$) равновесие, как видно, из (б), возможно, только когда $P = Q \sin a$.

Отметим еще, что если весом ползуна по сравнению с весом груза можно пренебречь и считать $P/Q = 0$, то условие равновесия (в) принимает вид

$$\sin(a - \varphi) \leq 0 \text{ или } a \leq \varphi,$$

т. е. сводится к тому, что участок AB нити должен лежать внутри угла трения; при этом система будет в равновесии, каков бы ни был груз Q (самотормозящее устройство).

Задача 7.3. Лестница опирается концами A и B на горизонтальный пол и вертикальную стену (рис. 7.8). Пренебрегая весом лестницы, определить, при каких положениях стоящего на ней человека система остается в равновесии. Углы трения φ_A и φ_B в точках A и B известны.

Решение. На лестницу действуют сила тяжести P , равная весу человека, и реакции R_A и R_B в точках A и B , которые могут иметь любые направления внутри углов трения. При равновесии эти силы должны пересекаться в одной точке. Но реакции R_A и R_B могут пересечься где угодно внутри заштрихованной на чертеже площади. Следовательно, при равновесии линия действия силы P должна пересекать эту площадь. Поэтому при том положении лестницы, которое показано на рисунке, человек может подняться только до точки D .

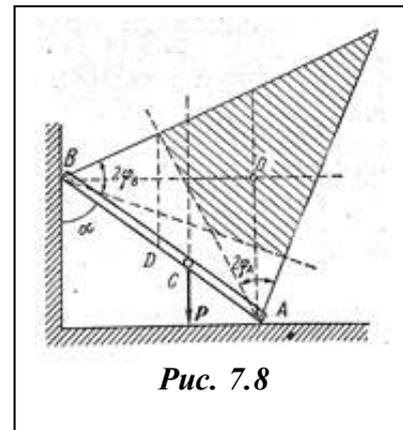


Рис. 7.8

Чтобы человек мог дойти до верхнего конца B лестницы, угла α , который она образует с вертикалью, должен быть не больше угла трения φ_A .

При отсутствии трения реакции будут нормальными и пересекутся в точке O . Равновесие будет возможно только тогда, когда человек стоит в точке A лестницы.

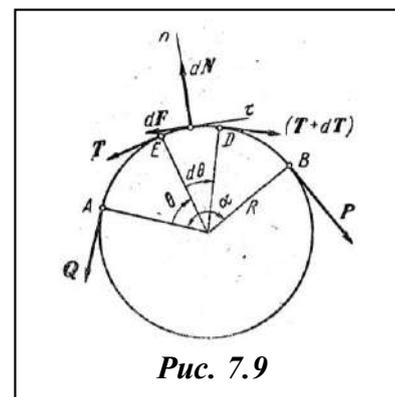


Рис. 7.9

в) Трение гибкой нити о цилиндрическую поверхность.

Рассмотрим нить, касающуюся поверхности кругового цилиндра вдоль дуги ADB с центральным углом α (рис. 7.9). Коэффициент трения нити о цилиндр равен f_0 . Рассмотрим равновесие элемента нити DE длины $ds = R d\theta$, где R — радиус цилиндра. На него действуют приложенные в точках D и E натяжения нити $T+dT$ и T , нормальная реакция dN и сила трения dF . Составляя условия равновесия в проекциях на касательную τ и нормаль n и считая $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$, $\cos \frac{d\theta}{2} = 1$, будем иметь

$$dT = dF, \quad dN = 2T \sin \frac{d\theta}{2} = T d\theta.$$

Но так как рассматриваемое положение равновесия является предельным, то $dF = f_0 dN$. Подставляя сюда значения dF и dN из равенств (7.6), получим:

$$dT = f_0 T d\theta.$$

Так как натяжение нити в точках A и B равно соответственно P и Q , то, разделяя в полученном уравнении переменные и беря от обеих частей определенные интегралы, получим:

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f_0 \int_0^a d\theta \quad \text{или} \quad \ln \frac{P}{Q} = f_0 a,$$

Откуда

$$Q = Pe^{-f_0 a}. \quad (7.7)$$

Формула (7.7), найденная Эйлером, показывает, что уравнивающая сила Q не зависит от радиуса цилиндра и при данном f_0 быстро убывает с увеличением a .

Пример. При трении пенькового каната о дерево $f_0 = 0,5$. Если обернуть такой канат вокруг столба два раза ($a = 4\pi$), то будет $Q = Pe^{-2\pi} \approx 0,002P$; натяжение в 1 T можно при этом уравновесить силой в 2 кг.

д) Трение качения

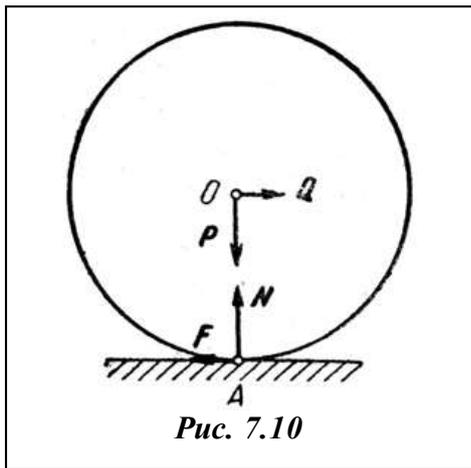


Рис. 7.10

Для качения тяжелого цилиндра (катка) по горизонтальной плоскости к оси цилиндра необходимо приложить горизонтальную силу Q для того, чтобы преодолеть сопротивление, возникающее при качении цилиндра. Это сопротивление носит название *трения качения*.

Трение качения возникает от того, что поверхность катящегося тела и плоскость, по которой тело катится, не абсолютно тверды, а несколько деформируются вследствие давления тела на плоскость.

Допустим, что цилиндр и плоскость являются абсолютно твердыми и касаются друг друга в точке A .

Чтобы могло происходить качение без скольжения, их поверхности должны быть шероховатыми. Пусть к оси цилиндра приложена горизонтальная сила Q , величина которой меньше F_{\max} (рис. 7.10). Тогда точка касания цилиндра A скользить вдоль плоскости не будет. На цилиндр при этом будут действовать две взаимно уравнивающиеся силы: сила тяжести P и приложенная в точке A нормальная реакция N , и две другие силы: сила Q и препятствующая скольжению точки A сила F , которые не могут уравновесить друг друга. Под действием этих сил и началось бы качение цилиндра при любой сколь угодно малой силе Q .

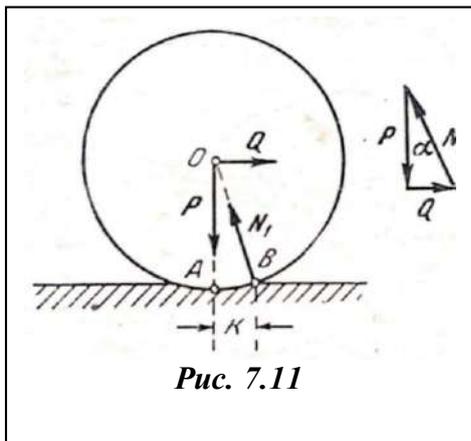


Рис. 7.11

В действительности картина будет иной. Вследствие деформации тел под действием сил P и N их касание происходит не в точке, а вдоль некоторой площадки (рис. 7.11).

При действии силы Q , направленной вправо, давление у левого края убывает, а у противоположного — возрастает. При этом нормальная реакция N смещается вправо в некоторую точку B и вместе с силой трения скольжения F (рис. 7.11) дает равнодействующую N_1 ,

которая проходит через ось O цилиндра и уравнивает силы P и Q . Как видно из силового треугольника, с увеличением силы Q сила N_1 , чтобы уравновесить систему,

должна образовывать все больший угол a с вертикалью, т. е. точка B приложения реакции N

должна все больше смещаться вправо. Но это смещение имеет известный предел, зависящий от свойств материалов соприкасающихся тел; обозначим его через k . Тогда, если Q имеет наибольшее значение $Q_{\text{пр}}$, при котором еще возможно равновесие, то $AB = k$. Значение $Q_{\text{пр}}$ можно найти из подобия силового треугольника и $\triangle OAB$. Считая $OA = R$, где R -радиус цилиндра, будем иметь $Q_{\text{пр}} / P = k / R$ или

$$Q_{\text{пр}} = \frac{k}{R} P. \quad (7.8)$$

Если $Q < Q_{\text{пр}}$, то цилиндр находится в покое, а при $Q > Q_{\text{пр}}$ начинается качение. Входящая в равенство (7.8) линейная величина k называется *коэффициентом трения при качении*. Измеряют k обычно в сантиметрах. Например, при качении вагонного колеса по рельсу

$k = 0,005$ см, а для шариковых подшипников (закаленная сталь) $k = 0,001$ см.

Отношение k/R для большинства материалов значительно меньше, чем коэффициент трения скольжения f . Поэтому в технике, трение скольжения стремятся заменить трением качения (колеса, катки, шариковые подшипники и т. п.).

8. Теория трения ремня по шкиву

Рассмотрим скольжение ремня на вращающемся шкиве радиуса R при различных значениях T_1 его ведомой ветви (рис.8.1). T_2 -напряжение ведущей ветви.

Пусть

$$T_2 = f(T_1) \text{ и } T_2 > T_1. \quad (8.1)$$

В некотором произвольном месте контакта шкива с ремнём удельное трение τ , стремящееся увлечь ремень, зависит только от удельного нормального давления P_n ремня на шкив, т.е.

$$\tau = \chi(\sigma). \quad (8.2)$$

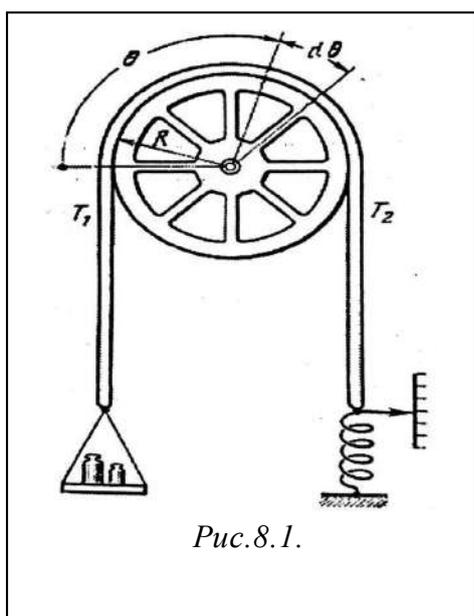


Рис.8.1.

Функцию $\chi(\sigma)$ необходимо определить, то есть зная $f(T_1)$ надо найти $\chi(\sigma)$

Для этого необходимо уравнение равновесия элемента ремня dS (рис.8.2) представить в виде

$$dT - \tau dS = 0, \quad Td\Theta - \sigma dS = 0, \quad (8.3)$$

где T -напряжение ремня в сечении с угловой координатой Θ .

Так как

$$dS = Rd\Theta \quad (8.4)$$

то из уравнения (8.3) и (8.2) следует

$$T = R\sigma, \quad d\sigma = \chi(\sigma) d\Theta \quad (8.5)$$

Таким образом приходим к интегральному соотношению

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)} = 0, \quad (8.6)$$

где $\sigma_1 = T_1 / R$ и принимаем, что при $\sigma = \sigma_1, \Theta = 0$, то есть при $T = T_1$ (рис.8.1).

При решении обратной задачи функцию $\chi(\sigma)$ будем считать в некоторых случаях заданной.

1-случай. Предположим, что имеет место закон трения Кулона-Амонтона

$$\tau = \chi(\sigma) - \mu \cdot \sigma, \quad (8.7)$$

где μ -коэффициент трения скольжения.

Согласно (8.2) и (8.6), получим

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)} = \frac{1}{\mu} \ln \frac{\sigma}{\sigma_1} = 0 \quad (8.8)$$

Учитывая (8.5), имеем

$$T = T_1 \cdot e^{\mu\Theta} \quad (8.9)$$

В результате приходим к известной формуле Эйлера. В заданном случае $\Theta = \pi$, поэтому

$$T_2 = T_1 e^{\mu\pi} \quad (8.10)$$

Натяжение T_2 ведущей ветви оказывается пропорциональным натяжению T_1 ведомой ветви. Характер зависимости $T_2 = f(T_1)$ такой же как у зависимости $\tau = \chi(\sigma)$.

2-случай. Согласно закона Кулона, А.И.Лурье [2] вывел зависимость.

$$\tau = a + \mu\sigma \quad (8.11)$$

где a и μ - физические константы.

Тогда

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{a + \mu\sigma} = \frac{1}{\mu} \ln \frac{a + \mu\sigma}{a + \mu\sigma_1} = \sigma = \frac{1}{\mu} [(\alpha + \mu\sigma_1) e^{\mu\Theta} - \alpha] \quad (8.12)$$

Полагая $\Theta = \pi$ и учитывая (8.5), получим

$$T_2 = A + MT_1, \quad (8.13)$$

где

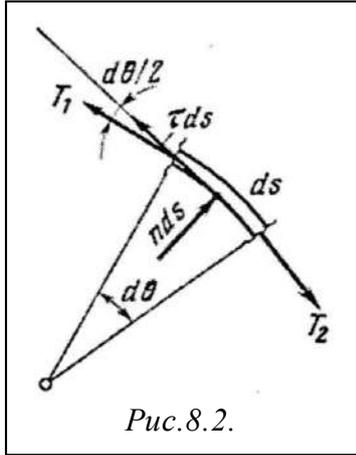
$$A = \frac{Ra}{\mu} (e^{\mu\pi} - 1), \quad M = R \cdot e^{\mu\pi} \quad (8.14)$$

В этом случае соотношение между T_2 и T_1 имеет тот же характер, что и соотношение зависимости (8.11) между τ и σ .

3-случай. Пусть закон трения представляется формулой по Т.В.Путята [21].

$$\tau = \beta th \frac{\mu\sigma}{\beta} \quad (8.15)$$

При малых значениях удельного давления σ ремня на шкив удельное трение τ близко следует закону (8.7) Кулона-Амонтона. Если же σ достаточно велико, то независимо от его значения удельное трение τ становится почти равным константе β . Имеем теперь, согласно (8.6)



$$\int_{G_1}^G \frac{d\sigma}{\beta \text{th}(\mu\sigma / \beta)} = \frac{1}{\mu} \ln \frac{\text{Sh}(\mu\sigma / \beta)}{\text{Sh}(\mu\beta\sigma_1 / \beta)} = \Theta \quad (8.16)$$

Тогда

$$\text{Sh} \frac{\mu\sigma}{\beta} = \text{Sh} \frac{\mu\sigma_1}{\beta} e^{\mu\Theta}. \quad (8.17)$$

Если $\mu G_1 \ll \beta$, то будем иметь

$$G_2 \approx G_1 e^{\mu\Theta} \quad (8.18)$$

и соответственно при $\Theta = \pi$

$$T_2 \approx T_1 e^{\mu\pi} \quad (8.19)$$

Если же μG_1 заметно превышает константу β , то получим

$$G_2 = \pi\beta + G_1 \quad (8.20)$$

и аналогичное соотношение между T_2 и T_1

$$T_2 = \pi R\beta + T_1 \quad (8.21)$$

Введем новую неизвестную функцию $S(\sigma)$ являющуюся первообразной для $1/\chi(\sigma)$ тогда

$$S(\sigma) = \int \frac{d\sigma}{\chi(\sigma)} + \text{const} \quad (8.22)$$

При этом первоначальная искомая функция $f(G)$ выражается формулой

$$\chi(\sigma) = \frac{1}{S'(\sigma)} \quad (8.23)$$

Тогда соотношение (8.6) представится в виде

$$S(\sigma) - S(\sigma_1) = \Theta \quad (8.24)$$

Пусть $\Theta = \pi$, тогда $\sigma = \sigma_2 = T_2 / R$ и основываясь на зависимости (8.1) и (8.5) удельное давление σ_2 оказывается известной функцией σ_1 , то есть

$$\sigma_2 = \varphi(\sigma_1) \quad (8.25)$$

Вид функции $\varphi(\sigma_1)$ устанавливается по заданной функции $f(T_1)$. Заменяя в соотношении (8.23) переменную σ на $\varphi(\sigma_1)$ и обозначая σ_1 через x , приходим к уравнению

$$S[\varphi(x)] - S[x] = \pi \quad (8.26)$$

Заменяем в уравнении (8.26) искомую функцию натуральным логарифмом

$$S(x) = \ln \psi(x) \quad (8.27)$$

Тогда уравнение (8.26) будет иметь вид

$$\psi[\varphi(x)] = k \cdot \psi(x) \quad (8.28)$$

здесь $k = \exp \pi$. Пусть при некотором $x_1 = \psi(x_1)$ будет иметь некоторое значение, тогда по уравнению (8.28) можно найти значение функции $\psi(x)$ в точке $x_2 = \varphi(x_1)$ и далее в точках $\varphi(x_2)$, $\varphi(x_3)$, и т.д.

Таким образом можно последовательно находить отдельные значения искомой функции $\psi(x)$, а значит, $S(x)$ и $\chi(\sigma)$.

9. Некоторые случаи равновесия тел при наличии трения

Пример 9.1. Ползун. Предположим, что рассматриваемое тело (ползун) имеет вертикальную плоскость симметрии; пусть сечение тела этой плоскостью представляет собой прямоугольник со сторонами $2a$ и $2h$ (рис. 9.1). К ползуну приложены вертикальная нагрузка Q и горизонтальная сила P , линии действия которых будем считать пересекающимися в центре C прямоугольника. Реакция плоскости основания на ползун приводится к нормальной реакции N и силе трения F , причем линия действия N неизвестна; ее расстояние от точки C обозначим через x . Очевидно $x \leq a$.

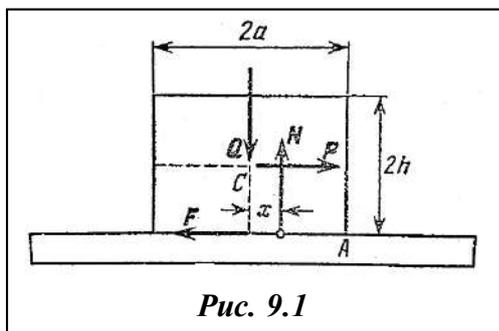


Рис. 9.1

Составляем три уравнения равновесия плоской совокупности сил Q, P, N, F в виде двух уравнений проекций на горизонтальную и вертикальную оси и уравнения моментов относительно точки C :

$$N - Q = 0, \quad P - F = 0, \quad Nx - Fh = 0,$$

или

$$N = Q, \quad F = P, \quad x = \frac{Fh}{N} = \frac{Ph}{Q}$$

Согласно закону трения имеем

$$F < fN, \quad \text{т.е.} \quad P \leq fQ$$

и, как указано выше,

$$x = \frac{Ph}{Q} \leq a, \quad \text{т.е.} \quad P \leq \frac{a}{h} Q.$$

Будем постепенно увеличивать P . Если $f < a/h$, то равновесие будет иметь место до тех пор, пока сила трения не достигнет своей предельной величины, после чего начнется скольжение ползуна; если же $f > a/h$, то, как только P станет больше, чем aQ/h , тело, раньше чем начнется скольжение, опрокинется вокруг ребра A .

Пример 9.2. Наклонная плоскость. Рассмотрим ту же задачу, что и в предыдущем примере, но в предположении, что ползун положен на плоскость, наклоненную к горизонту под углом α (рис. 9.2). Усилие, стремящееся сдвинуть тело вдоль наклонной плоскости, равно по величине $|P - Q \sin \alpha|$ и направлено:

а) вверх, если $P - Q \sin \alpha > 0$, б) вниз, если $P - Q \sin \alpha < 0$.

В случае а) сила трения F при покое направлена противоположно P . Уравнения равновесия дают (рис. 9.2, а)

$$P - Q \sin \alpha - F = 0, \quad Q \cos \alpha - N = 0, \quad Nx - Fh = 0.$$

Находим, что при равновесии

$$P \leq Q(\sin \alpha + f \cos \alpha), \quad P \leq Q\left(\sin \alpha + \frac{a}{h} \cos \alpha\right)$$

Если постепенно увеличивать силу P от значения $Q \sin \alpha$, то при $f < a/h$ равновесие

будет иметь место до тех пор, пока P не достигнет значения, даваемого первым из этих неравенств:

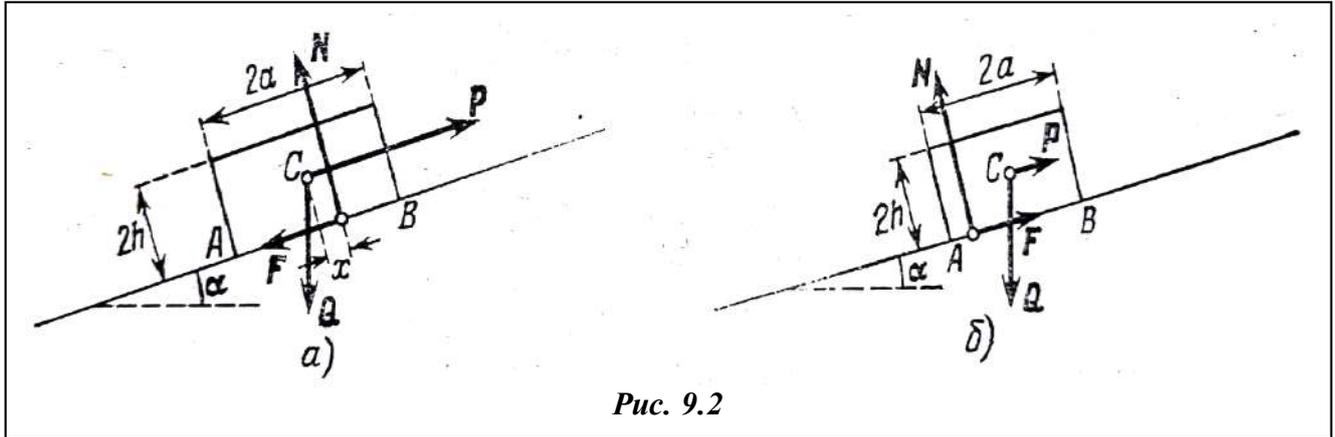


Рис. 9.2

когда это значение будет превзойдено, тело начнет скользить вверх по плоскости. Если же $f > a/h$ и P достигнет и превзойдет значение, даваемое вторым неравенством, то до наступления скольжения тело начнет опрокидываться вокруг правого ребра B .

В случае б) сила трения будет иметь направление силы P . Как и выше, получим (рис.9.2,б)

$$P \geq Q(\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad P \geq Q(\sin \alpha - \frac{a}{h} \cos \alpha).$$

Если $f < a/h$, то при постепенном уменьшении P от значения $Q \sin \alpha$ равновесие будет иметь место, пока будет удовлетворено первое неравенство (в противном случае тело станет скользить вниз по наклонной плоскости). Наконец, при $f > a/h$ равновесие имеет место, если соблюдено второе неравенство (в противном случае произойдет опрокидывание вокруг левого ребра A).

Таким образом при равновесии сила P должна удовлетворять (при $f < a/h$) неравенствам

$$Q(\sin \alpha - f \cos \alpha) \leq P \leq Q(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Если ввести в рассмотрение угол трения φ , то эти соотношения можно записать еще в виде

$$Q \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \leq P \leq Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Заметим, что при $\alpha < \varphi$ тело будет оставаться в равновесии при любом значении Q и при отсутствии силы P (самоторможение на наклонной плоскости).

Пример 9.3. Вкладыш и цапфа. Предположим, что вкладыш подшипника неплотно облегает цапфу, т. е. радиус последней r несколько меньше радиуса вкладыша (рис. 9.3). Пусть цапфа нагружена силой Q и некоторой парой, момент которой m . Вследствие наличия этой пары точка A соприкосновения цапфы и вкладыша сместится при равновесии немного над нижней точкой вкладыша: цапфа «взбегает» по вкладышу.

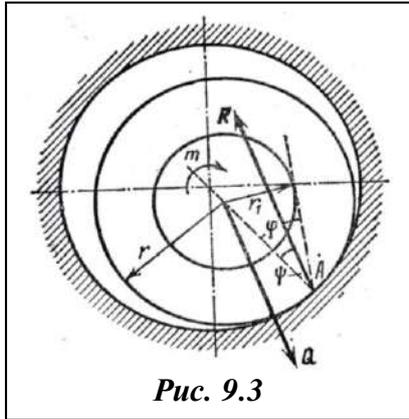


Рис. 9.3

Будем пренебрегать трением качения и влиянием смазки на трение скольжения. Реакция вкладыша на цапфу при равновесии должна сводиться к силе R , равной по величине Q и направленной противоположно Q (так как главный вектор всех сил, действующих на цапфу, должен равняться нулю). Но этого недостаточно; нужно еще, чтобы пара сил (Q, R) уравновешивалась приложенной парой m . Если через ψ обозначить угол, на который отклонена реакция R от общей нормали в точке A к поверхностям вкладыша и цапфы, то получим

$$R - Q = 0, \quad R_r \sin \psi - m = 0, \quad \text{т.е.} \quad m = Qr \sin \psi$$

имея в виду, что $\psi \leq \varphi$ где φ — угол трения, находим

$$m \leq Qr \sin \varphi$$

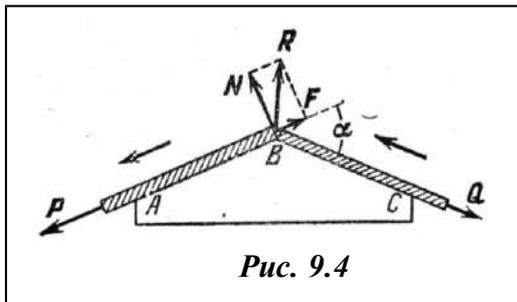


Рис. 9.4

Если это неравенство не соблюдено, то цапфа будет вращаться, скользя по вкладышу.

Построим круг радиуса $r_1 = r \sin \varphi$ с центром в центре цапфы (так как радиусы вкладыша и цапфы очень мало отличаются друг от друга, то за центр этого

круга можно принять без большой ошибки и центр вкладыша). Это — так называемый **круг трения**. При равновесии линия действия реакции R должна пересекать круг трения или касаться его.

Пример 9.4. Трение каната о шкив. Определить усилие P (рис. 9.4), необходимое для перетягивания через ребро B призмы ABC веревки, к другому концу которой приложено некоторое заданное сопротивление Q . Коэффициент трения веревки о ребро призмы равен f ; внешний угол призмы равен α ; трением веревки о грани AB и BC пренебрегаем, считая реакцию поверхности сосредоточенной в точке B . Ветви веревки растянуты силами P и Q ; точка B веревки находится в равновесии под действием указанных сил P, Q и реакции ребра R . Реакция R в свою очередь может быть разложена на давление N ребра призмы на веревку и силу трения F , направленную перпендикулярно к силе N . Если бы мы знали направление реакции N , то задачу легко было бы решить. Но в угле B нет определенной нормали к поверхности призмы, точно так же неизвестна форма соприкасающейся с ребром веревки.

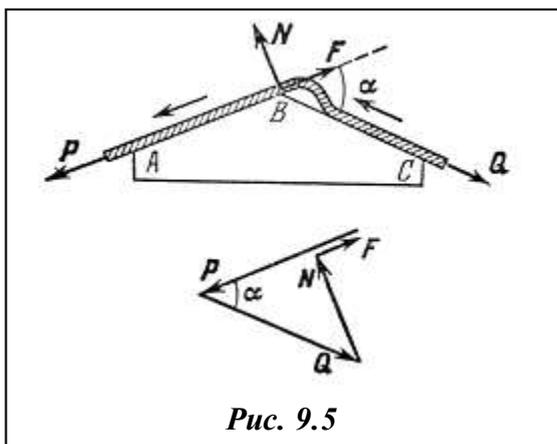


Рис. 9.5

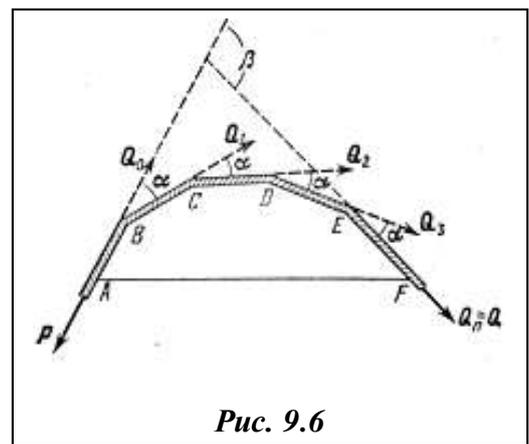


Рис. 9.6

Здесь мы встречаемся с задачей неопределенной; по одной заданной силе Q и направлению второй силы P треугольник сил P, Q, R построить нельзя. Чтобы сделать задачу определенной, необходимо принять какие-то дополнительные гипотезы о направлении силы N . Так, например, если принять во внимание жесткость веревки, т.е. ее сопротивление изгибу при переходе через ребро призмы, то можно себе представить, что веревка при перетягивании ее в направлении стрелки силой P примет форму, указанную на рис. 9.5, и считать, что реакция N направлена перпендикулярно к грани AB . Составляя силовой многоугольник P, Q, N, F , получаем

$$P - F = Q \cos \alpha, \quad N = Q \cos \alpha .$$

Ограничиваясь рассмотрением критического момента равновесия, полагаем $F = fN$. Тогда получим

$$P = Q(\cos \alpha + f \sin \alpha).$$

При малых α ($\sin \alpha \approx \alpha, \cos \alpha \approx 1$) будем приближенно иметь

$$P = Q(1 + f \alpha).$$

Применяя эту формулу к случаю многоугольной призмы с малыми внешними углами α (рис. 9.6), будем иметь

$$\begin{aligned} Q_{n-1} &= Q_n(1 + f \alpha) = Q(1 + f \alpha), \\ Q_{n-2} &= Q_{n-2}(1 + f \alpha) = Q(1 + f \alpha)^2, \\ &\dots\dots\dots \\ Q_1 &= Q_2(1 + f \alpha) = Q(1 + f \alpha)^{n-1}, \\ Q_0 = P &= Q_1(1 + f \alpha) = Q(1 + f \alpha)^n, \end{aligned}$$

где n — число ребер, на которых происходит изгиб веревки.

Обозначая через β полный угол отклонения веревки, равным

$$\beta = n\alpha$$

окончательно получим

$$P = Q \left(1 + f \frac{\beta}{n} \right)^n$$

Задача: Веревка навита на неподвижный горизонтальный цилиндр, и к нижнему концу ее прикреплен груз P (рис. 9.7); какое усилие Q надо приложить к другому ее концу, чтобы удержать груз от падения, если угол охвата равен β а коэффициент трения веревки о цилиндр равен f ?

Эта задача была решена впервые Эйлером.

Переходя к пределу в предшествующей формуле, находим

$$P = Q \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + f \frac{\beta}{n} \right)^n = Q e^{f\beta},$$

Или

$$Q = P e^{-f\beta}, \quad (9.6)$$

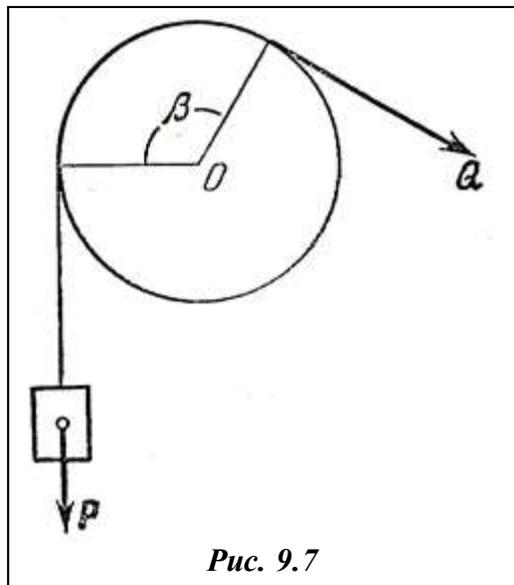


Рис. 9.7

где e обозначает основание натуральных логарифмов.

Из формулы (9.6) следует, что уравновешивающая сила не зависит от радиуса цилиндра, а зависит лишь от коэффициента трения веревки о цилиндр и от угла охвата цилиндра веревкой. Сила Q убывает с ростом угла охвата по показательному закону; так, например, при $\beta = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ и $f = 0.2$ будем иметь $Q = 0.21P$.

Пример 9.5. Каковы должны быть размеры механизма, показанного на рис. 9.8. для того, чтобы при коэффициенте трения $f = 0.6$ между стенкой и ползунами A и B механизм был самотормозящимся?

Ставим условие, чтобы линия действия силы давления стержня на ползун лежала в области трения, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{L} \sqrt{l^2 - \frac{1}{4} L^2} < 0.6;$$

тогда, замечая, что $AC > AD$, после простых вычислений получим

$$0.5 < \frac{l}{L} < 0.585.$$

Эти неравенства определяют конструкцию.

Пример 9.6. Определить наименьшее расстояние x (рис. 9.9) центра груза от оси CC платформы E , при котором груз с платформой (весом платформы пренебрегаем) будет в равновесии, если коэффициент трения подвижного стержня CC о направляющие стойки A и B равен f .

При равновесии линия действия силы P должна проходить через точку пересечения линий действия опорных реакций R_A и R_B . Так как последние в критический момент направлены под известными углами трения φ к горизонтали, то точку пересечения D этих реакций легко найти. Из геометрических соображений получим

$$x_{\min} = \frac{h}{2} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{d}{2} = \frac{h}{2f} + \frac{d}{2}.$$

Чем меньше коэффициент трения, тем большее расстояние груза от оси стойки придется взять, чтобы сохранить равновесие. При $x > x_{\min}$ т. е. при

$$x > \frac{h}{2f} + \frac{d}{2},$$

платформа будет самотормозящейся, так как при любой величине нагрузки P платформа сохранит равновесие. На свойствах самоторможения такого рода конструкций основан ряд строительных приспособлений и других механизмов.

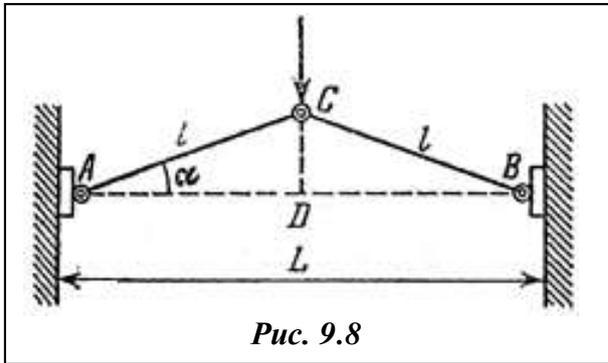


Рис. 9.8

Пример 9.7 Определить, в каких пределах может изменяться при равновесии клинового пресса (рис. 9.10) сила P при заданной нагрузке на пресс Q . Даны коэффициенты трения f , f_1 и f_2 (или соответствующие углы трения φ , φ_1 , φ_2) и угол клина α

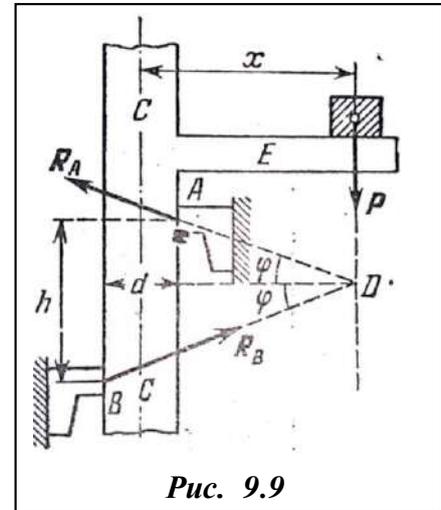


Рис. 9.9

На тело (2) действуют: сила Q , реакция R_2 опоры B и реакция R тела (1). Каждая из этих реакций отклонена от нормали на некоторый угол, не превосходящий угла трения между соответствующими поверхностями ($\rho \leq \varphi$, $\rho_2 \leq \varphi_2$). Поскольку тело (2) находится в равновесии под действием плоской совокупности трех сил, то линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке, что и показано на рисунке. На тело (1) действуют; перемещающая клин сила P , реакция R_1 , опоры A и реакция R^* тела (2), также пересекающиеся в одной точке; конечно, $R^* = -R$ и $\rho_1 \leq \varphi_1$

Направлениям сил на рисунке соответствует случай, когда некоторое увеличение силы P сопровождается перемещением тела (2) вверх, а тела (1)—вправо. Составим силовые треугольники для первого и второго тела; из них получим

$$\frac{R}{Q} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \rho_2\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \rho + \rho_2)\right]}, \quad \frac{P}{R^*} = \frac{\sin(\alpha + \rho + \rho_1)}{\sin\left[\frac{\pi}{2} - \rho_1\right]},$$

имея в виду, что $R = R^*$, находим теперь

$$P = Q \frac{\sin(\alpha + \rho + \rho_1) \cos \rho_2}{\cos(\alpha + \rho + \rho_2) \cos \rho_1}.$$

Углы $\rho + \rho_1 + \rho_2$ неизвестны. Из построения силовых треугольников можно, однако, заключить, что увеличение этих углов при фиксированных Q и α сопровождается

увеличением P^*). Поэтому

$$P \leq Q \frac{\sin(\alpha + \varphi + \varphi_1) \cos \varphi_2}{\cos(\alpha + \varphi + \varphi_2) \cos \varphi_1}.$$

Рассмотрев аналогичным образом случай, когда некоторое уменьшение силы P может сопровождаться перемещением тела (2) вниз, а тела (1) — влево, получим

$$P \geq Q \frac{\sin(\alpha - \varphi - \varphi_1) \cos \varphi_2}{\cos(\alpha - \varphi - \varphi_2) \cos \varphi_1}.$$

Этот случай отличается от предыдущего тем, что в критический момент равновесия реакции R , R_1 , R_2 отклонены от нормалей в стороны, противоположные принятым на рис. 9.10. Поэтому можно просто в правой части неравенства изменить знаки углов $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, изменив одновременно знак \leq на знак \geq .

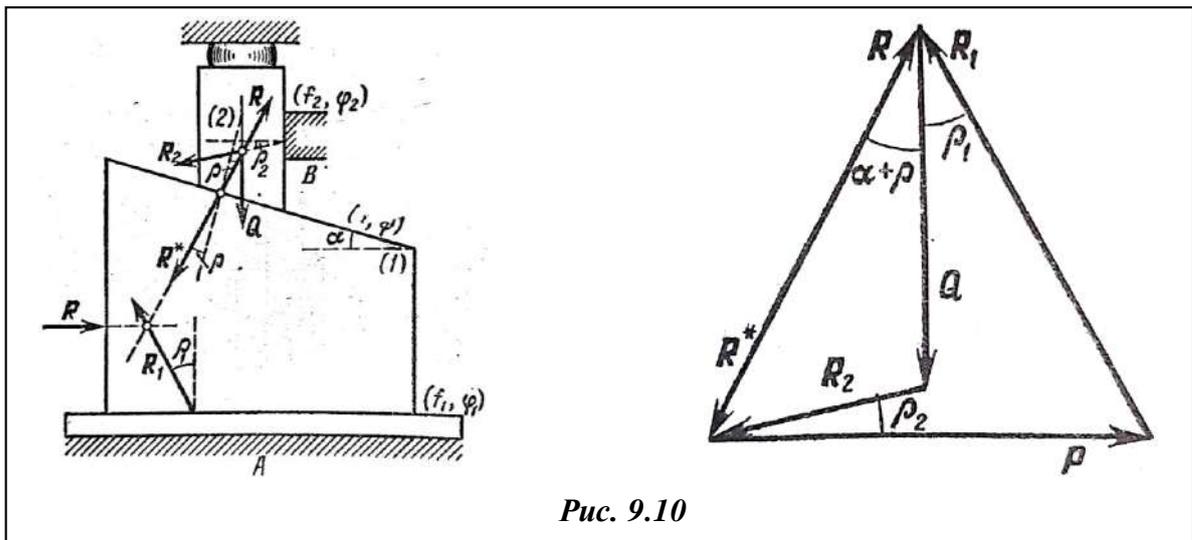


Рис. 9.10

Итак, при равновесии клинового пресса имеем

$$Q \frac{\sin(\alpha - \varphi - \varphi_1) \cos \varphi_2}{\cos(\alpha - \varphi - \varphi_2) \cos \varphi_1} \leq P \leq Q \frac{\sin(\alpha + \varphi + \varphi_1) \cos \varphi_2}{\cos(\alpha + \varphi + \varphi_2) \cos \varphi_1}.$$

Пресс будет самотормозящимся (т. е. будет оставаться в равновесии при исчезновении давления на клин P и при любом Q), если $\alpha < \varphi + \varphi_1$.

Пример 9.8. Учитывая трение в шарнире, определить, в каких пределах может при равновесии углового прямоугольного рычага изменяться сила P , уравнивающая заданную нагрузку Q . Радиус шипа r , угол трения φ , длины сторон рычага соответственно равны a и b (рис. 9.11).

Реакция шарнира R , очевидно, равна по величине равнодействующей $\sqrt{P^2 + Q^2}$ сил P и Q . Построим круг трения, т. е. круг радиуса $r_1 = r \sin \varphi$ с центром в центре шипа C (на рисунке показан пунктиром). Линия действия реакции R при равновесии рычага проходит через точку A пересечения линий действия сил P и Q внутри круга трения (или в крайнем случае касается этого круга). Иными словами, линия действия R проходит внутри (или по сторонам) угла между касательными, проведенными из A к кругу трения.

Поэтому уравнение моментов относительно точки C имеет один из двух видов: или

$$Pa = Qb - r_1 \sqrt{P^2 + Q^2},$$

или

$$Pa = Qb + r_1 \sqrt{P^2 + Q^2},$$

причем $r_1 \leq r_2$, $r_1 \leq r_1$. Можно убедиться, что значение P , определяемое первым из этих равенств, убывает, когда r_1 возрастает); наоборот, P , определяемое вторым равенством, возрастает вместе с r_1 . Поэтому

$$Qb - r_1 \sqrt{P^2 + Q^2} \leq Pa \leq Qb + r_1 \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Решение этих неравенств относительно P приводит к сложным выражениям. Поэтому воспользуемся приближенным представлением ради кала, предложенным Понселе; пусть

$x > y > 0$; тогда с относительной погрешностью, не превосходящей $\pm 4\%$, можно принять

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \alpha x + \beta y, \quad \alpha = 0.3960, \quad \beta = 0.398,$$

что соответствует замене дуги окружности в пределах $(0, \pi/4)$ секущей прямой с коэффициентами, определенными из условия наименьшего отклонения этой секущей от дуги окружности.

Действительно, рассматривая P как неявную функцию от r_1 имеем

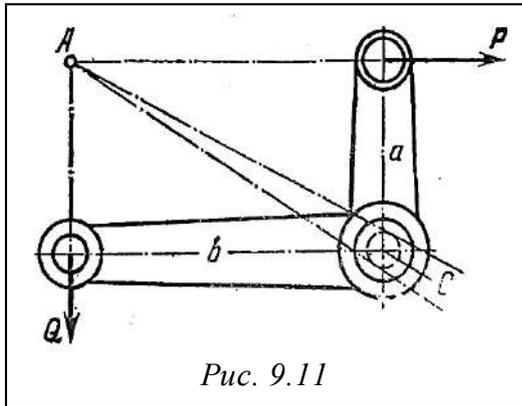


Рис. 9.11

$$\frac{dP}{dr_1} = - \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{a + \frac{r_1 P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}} < 0.$$

Понселе (J. Poncelet, 1788—1876)—французский математик и инженер) [11] один из основателей прикладной механики. Доказательство формулы Понселе, основанное на теории П. Л. Чебышева функций, наименее уклоняющихся от нуля, приведено в «Лекциях о функциях, наименее уклоняющихся от нуля» А. А. Маркова [11]

Пусть $a > b$, тогда $P < Q$ (если трение невелико). Из неравенств (9.1) получаем

$$P\alpha \geq Qb - r_1(\alpha Q + \beta P), \quad \text{т.е.} \quad P \geq Q \frac{b - r_1 \alpha}{\alpha + r_1 \beta},$$

$$P\alpha \leq Qb + r_1(\alpha Q + \beta P), \quad \text{т.е.} \quad P \leq Q \frac{b + r_1 \alpha}{\alpha - r_1 \beta},$$

Если P меньше, чем величина в правой части первого неравенства, то груз Q станет опускаться; если же P превзойдет величину правой части второго неравенства, то нарушение равновесия будет сопровождаться подъемом груза Q .

10. Некоторые вопросы проскальзывания при трении качения

При качении катка по горизонтальному основанию приходится преодолевать сопротивление перекачиванию или трение качения. При теоретическом исследовании качения катка по не вполне упругому основанию обычно пренебрегают влиянием на величину момента сопротивления перекачиванию горизонтальных составляющих сил взаимодействия катка и основания, а также частичных скольжений их поверхностей друг по другу в области их соприкосновения.

В случае качения абсолютно упругого катка по абсолютно упругому основанию частичные скольжения поверхностей играют основную роль. Таким образом при перекачивании упругих тел работа затрачивается в основном на преодоление сил трения в той области, где происходит их относительное проскальзывание.

Проскальзывание при трении качения впервые было обнаружено О. Рейнольдсом [2]. Он заметил, что ведущий каток на одном и том же пути делает больше оборотов, чем каток ведомый. Рейнольдс объяснил кажущееся проскальзывание наличием относительной деформации катка и основания в направлении движения.

Г.Фромм [3] для построения теории фрикционной передачи и Н.И.Глаголев [4] для трения качения использовали схему О.Рейнольдса. Ф.Картер [5] и Г.Поритский [1] рассматривали свои задачи в условиях плоской деформации. Разграничение зон проскальзывания и зон, где проскальзывание отсутствует, потребовало от них принятия некоторых дополнительных допущений.

При исследовании теории качения абсолютно жесткого катка по упрощенной модели абсолютно упругого основания не предполагали о порядке расположения зон сцепления и проскальзывания в области контакта. Предполагали, что трение между катком и основанием подчиняется закону Амонтона-Кулона.

Пусть горизонтальное основание, по которому перемещается каток, состоит из бесконечного числа упругих стержней, горизонтальные и вертикальные смещения торцов которых u и v (рис.1) связаны соотношениями

$$p = A\zeta, \quad q = B \cdot \lambda \quad (10.1)$$

соответственно с горизонтальной и вертикальной составляющими p и q распределенного усилия, действующего на основание.

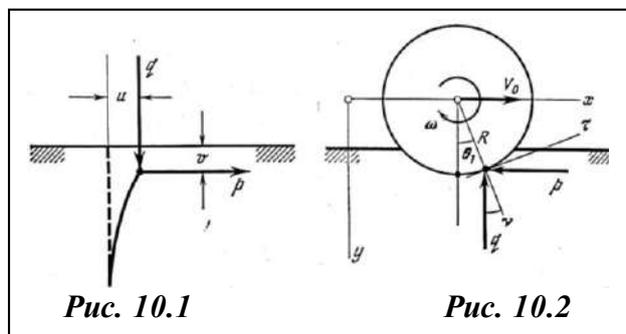


Рис. 10.1

Рис. 10.2

Обозначим через Θ , угол между вертикалью и нормалью, построенными в месте контакта какого-либо упругого стержня с катком. Тогда нормальная составляющая реакции основания (рис.10.2) будет имеет вид

$$r_v = p \sin \theta_x + q \cos \theta_x \quad (10.2)$$

Эта составляющая всегда положительна, а знак касательной составляющей

$$r_\xi = -p \cos \Theta_1 + q \sin \Theta_1 \quad (10.3)$$

будет определяться направлением относительного скольжения в данном месте поверхности катка по основанию.

Рассмотрим конкретный случай характера контакта упругого основания с катком. Пусть контакт происходит без скольжения торцов упругих стержней. Тогда согласно закона Кулона должно соблюдаться неравенство $|r_r| \leq |f| \|r_v\|$, т. е

$$|-p \cos \Theta_1 + q \sin \Theta_1| \leq f (p \sin \Theta_1 + q \cos \Theta_1) \quad (10.4)$$

где f - коэффициент трения поверхности катка по основанию. При контакте без скольжения скорость соответствующей точки катка равна скорости совпадающей с ней точки основания. Введем обозначения: v_0 — скорость центра катка, ω - его угловая скорость и R -радиус катка, XU - неподвижная система координат, ось x горизонтальна и направлена в сторону движения центра катка, а ось y - вертикальна вниз (рис.10.2). Проекции скорости какой-либо точки катка на оси этой системы координат соответственно равны величинам

$$V_x = V_0 - \omega R \cos \Theta_1, \quad V_y = \omega R \sin \Theta_1 \quad (10.5)$$

Будем считать, что вертикальная ξ и горизонтальная λ составляющие смещения торца какого-либо стержня являются функциями двух переменных: координаты x и времени t . Под x следует понимать координату начального положения соответствующей точки основания.

Таким образом,

$$\xi = \xi(x, t), \quad \lambda = \lambda(x, t).$$

Проекция скорости какой-либо точки основания относительно неподвижной системы координат на ее оси будут

$$V'_x = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t}, \quad V'_y = \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} \quad (10.6)$$

В каждой точке контакта скорость V' торца стержня и скорость V' соответствующего места поверхности катка всегда имеют одинаковые составляющие вдоль радиуса катка.

В точках контакта, где нет проскальзываний, справедливо равенство $V_x = V'_x$, $V_y = V'_y$, следовательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi(x, y)}{\partial t} &= V_0 - \omega R \cos \Theta_1, \\ \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial t} &= \omega R \sin \Theta_1, \end{aligned} \quad (10.7)$$

Таким образом, после проведенных исследований выяснили, что часть области контакта, где нет скольжения поверхности катка по поверхности основания, характеризуется равенствами (10.7) и неравенством (10.4).

11. Равновесие твердых тел при наличии трения

а) Трение гибких тел

Предположим, что на неподвижный цилиндр навита нить, к одному концу которой подвешен груз весом P . Угол охвата цилиндра нитью равен α (рис. 11.1). **Коэффициент трения нити** о шероховатую поверхность цилиндра равен f . Тогда сила T , необходимая для удержания груза P в равновесии, определяется по **формуле Эйлера**:

$$T = Pe^{-f\alpha}, \quad (11.1)$$

где e — основание натуральных логарифмов. Таким образом, сила T , уравнивающая груз P , не зависит от диаметра цилиндра и является функцией угла охвата и коэффициента трения.

При решении задач на равновесие твердых тел при наличии **трения гибких нитей** следует:

1) сопоставить число неизвестных величин и число уравнений равновесия, добавив к уравнениям равновесия зависимость, между силами натяжения нити с обеих сторон охватываемого тела, и убедиться в том, что число независимых уравнений равно числу неизвестных и, следовательно, задача является статически определенной;

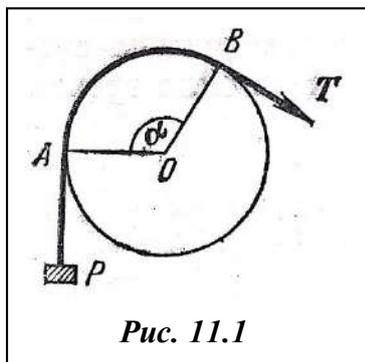


Рис. 11.1

- 2) выбрать систему координат;
- 3) составить уравнения равновесия твердого тела;
- 4) решив эту систему уравнений, определить неизвестные величины.

Задача 11.1. При швартовке судна матрос накладывает канат восьмеркой на чугунные столбы. Натяжение каната равно Q , сила, с которой матрос удерживает канат, равна P . Угол охвата канатом каждого столба равен 210° . (рис.11.2).

Определить **коэффициент трения** каната о столбы, если известно, что матрос может удерживать канат, наложив три восьмерки. Полагая коэффициент трения каната о чугунный столб равным $f = 0,15$, определить величину натяжения, которое матрос способен удерживать, если сила $P = 0,6$ кН.

Решение. Угол охвата канатом одного столба равен

$$210^\circ = \frac{7}{6}\pi.$$

При наложении трех восьмерок угол охвата канатом столбов будет в шесть раз больше, т. е. 7π .

Тогда зависимость натяжений двух концов каната определится формулой

$$P = Qe^{-7\pi f}.$$

Находим искомый коэффициент трения между канатом и чугунным столбом:

$$f = \frac{1}{7\pi} \ln \frac{Q}{P}.$$

имеем

$$\ln \frac{Q}{P} = 7\pi f = 3,3.$$

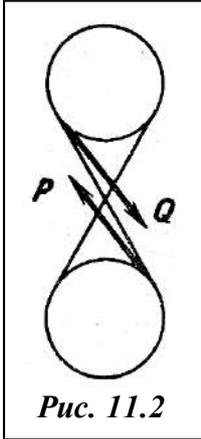


Рис. 11.2

Отсюда при заданных значениях f и P

$$Q/P = 27 \quad \text{и} \quad Q = 27 \cdot 0,6 = 16,2 \text{ кН}$$

Таким образом, наложив три восьмерки на чугунные столбы, матрос может удержать в равновесии канат, ко второму концу которого приложена сила, равная 16,2 кН.

Задача 11.2. Через два неподвижных вала с центрами O и O_1 (рис. 11.3 а) перекинут трос, к концам которого подвешены грузы P и Q , причем $P > Q$.

Определить минимальное значение **коэффициента трения** между валами и тросом, при котором грузы будут находиться в равновесии. Полагая коэффициент трения троса о вал равным $f = 0,25$, найти груз P , который

можно удержать в равновесии грузом $Q = 0,1$ кН.

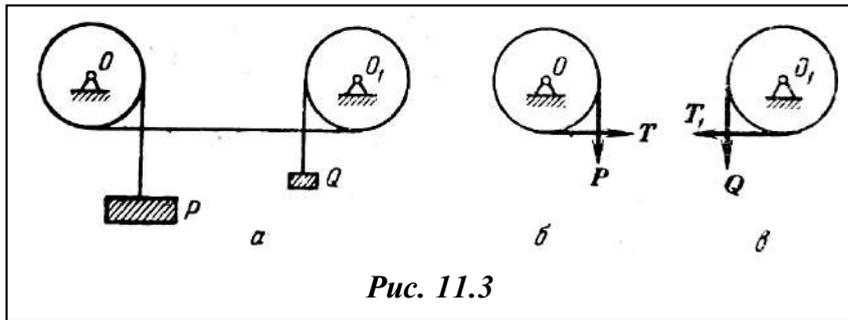


Рис. 11.3

Решение. Рассмотрим равновесие части троса, охватывающего левый вал (рис. 11.3). На трос действует активная сила P . Мысленно отбрасывая правый вал и разрезая трос между валами, заменяем действие правой части системы силой натяжения троса T . Для

равновесия этой части троса должно удовлетворяться равенство

$$T = Pe^{-f\alpha},$$

где угол охвата α равен $3\pi/2$. Итак,

$$T = Pe^{-\frac{3}{2}\pi f}.$$

Рассмотрим, равновесие правого вала (рис. 11.3.), отбросив мысленно левый вал, разрезав трос и заменив его действие силой T_1 . Согласно закону равенства действия и противодействия натяжения T и T_1 равны по величине. Для равновесия части троса, охватывающей правый вал, должно удовлетворяться равенство

$$Q = Te^{-\frac{3}{2}\pi f}. \tag{11.2}$$

так как и у правого вала угол охвата $\alpha = 3\pi/2$.

Решая совместно уравнения (11.1) и (11.2), исключая натяжение троса между валами T , находим

$$P/Q = e^{3\pi f}.$$

откуда

$$f = \frac{1}{3\pi} \ln \frac{P}{Q}.$$

Эта же задача может быть решена и другим способом. Рассматривая равновесие всего троса (рис. 11.3) и замечая, что полный угол охвата тросом двух валов равен

$$\frac{3}{2}\pi + \frac{3}{2}\pi = 3\pi,$$

находим зависимость между силами P и Q :

$$Q = Pe^{3\pi f}.$$

откуда имеем

$$f = \frac{1}{3\pi} \ln \frac{P}{Q}. \quad (11.3)$$

Для определения величины груза P , который может быть удержан в равновесии грузом $Q = 0,1$ кН, из (11.3) находим

$$\ln \frac{P}{Q} = 3\pi f = 2,358.$$

Тогда

$$P/Q = 10,5 \quad \text{или} \quad P = 0,1 \cdot 10,5 = 1,05 \quad \text{кН}.$$

Таким образом, грузом Q , равным 0,1 кН, можно удержать в равновесии груз P , равный 1,05 кН.

Задача 11.3. Трос AB охватывает барабан, вращающийся вокруг центра O . Коэффициент трения троса о барабан равен f . Концы троса A и B прикреплены к рычагу BAD , который может поворачиваться вокруг точки D . Расстояния $AD = a$, $BD = b$.

Определить натяжение троса в точках A и B . Пренебрегая весом рычага BAD , найти расстояние $CD = c$, на котором надо подвесить к рычагу груз Q , чтобы давление в точке D равнялось нулю.

Решение. Рассмотрим равновесие троса, охватывающего барабан, отбросив мысленно рычаг (рис. 11.4) и заменив его действие реакциями троса S_1 и S_2 .

Зависимость между этими натяжениями определится формулой

$$S_2 = S_1 e^{f\pi}, \quad (11.4)$$

так как угол охвата тросом барабана равен π . При заданном направлении вращения барабана натяжение $S_1 < S_2$. Рассмотрим, равновесие рычага BAD , полагая что давление в точке D , и, следовательно, реакция шарнира D равны нулю. На рычаг действует активная сила Q . Отбросим мысленно трос и заменим его действие реакциями S_1 и S_2 (рис. 11.4).

Очевидно, что $S'_1 = S_1$, $S'_2 = S_2$.

Выберем оси координат и составим уравнения равновесия

$$\Sigma F_{ky} = S_1 + S_2 - Q = 0, \quad (11.5)$$

$$\Sigma m_D(F_k) = Qc - S_1a - S_2b = 0.$$

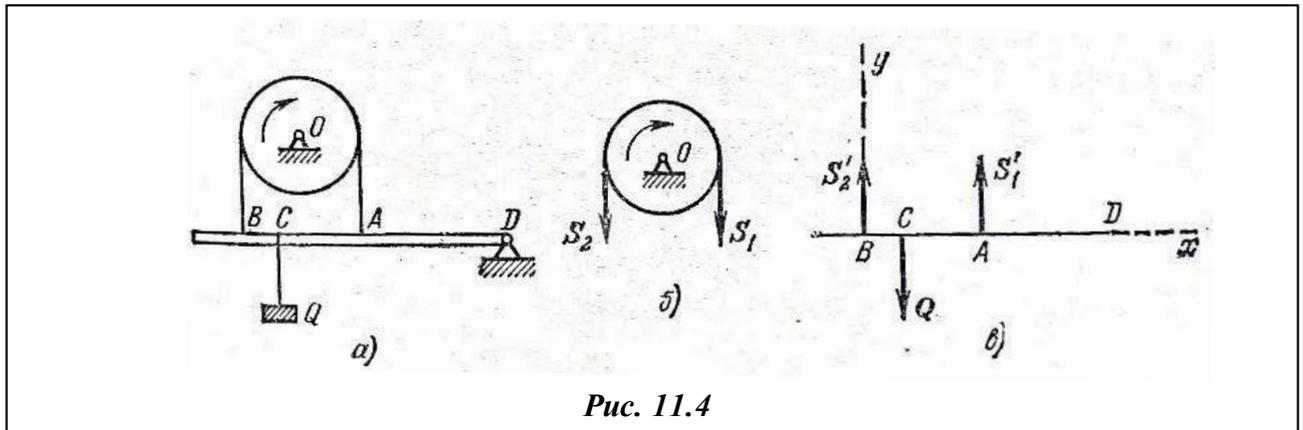


Рис. 11.4

(11.6)

Получим систему из трех уравнений (11.4), (11.5), (11.6) с тремя неизвестными: S'_1 , S'_2 , c . Из уравнений (11.4) и (11.5) получим

$$S_1 = \frac{Q}{1 + e^{f\pi}}, \quad S_2 = \frac{Qe^{f\pi}}{1 + e^{f\pi}}.$$

Подставив эти значения натяжений в уравнение (11.6), найдем искомое расстояние c :

$$c = \frac{S_1a + S_2b}{Q} = \frac{a + be^{f\pi}}{1 + e^{f\pi}}.$$

Вместо уравнений равновесия (11.5) и (11.6) можно составить два уравнения моментов относительно точек A и B . К этим точкам приложены неизвестные по величине реакции S'_1 и S'_2 . Следовательно, каждое уравнение моментов будет содержать только одну неизвестную величину силы и искомое расстояние c :

$$\Sigma m_A(F_k) = Q(c - a) - S_2(b - a) = 0,$$

$$\Sigma m_B(F_k) = S_1(b - a) - Q(b - c) = 0.$$

Решая эти уравнения совместно с равенством (11.4), приходим к ранее полученным ответам.

Задача 11.4. Ремень пропущен через пять неподвижных валиков, как это показано на рис. 11.5. Коэффициент трения ремня о валик $f=0,4$. Расстояние между центрами валиков, расположенными на одной прямой, равно $l = 50$ мм. Диаметр валиков $d = 25$ мм. Слева к ремню приложена сила $P = 1,5$ кН.

Каково минимальное значение силы Q , при котором ремень будет находиться в покое.

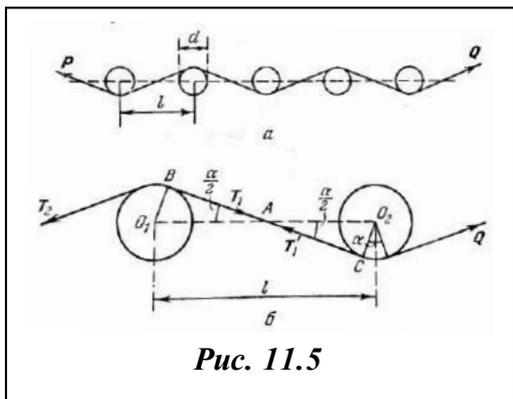


Рис. 11.5

Решение. Обозначим угол охвата валика ремнем через α . Тогда для отрезка ремня, охватывающего каждый валик, можно записать соотношение между натяжениями ремня по обе стороны от валика:

$$Q = T_1 e^{f\alpha}, \quad T_1 = T_2 e^{f\alpha}, \quad T_2 = T_3 e^{f\alpha}, \quad \dots \quad T_4 = P e^{f\alpha},$$

Исключая из этой системы уравнений промежуточные усилия T_1, \dots, T_4 (перемножая все равенства), находим

$$Q = P e^{fa}, \quad (11.7)$$

Угол α определится из равных прямоугольных треугольников AO_1B и AO_2C (рис. 11.5)

$$l \sin \frac{\alpha}{2} = d,$$

Откуда

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{l} = 0,5, \quad \alpha = 60^\circ = 1,0472 \text{ рад}$$

Тогда из (11.7) находим

$$Q = 1,5 \cdot e^{5 \cdot 0,4 \cdot 1,0472} = 1,5 \cdot e^{2,0944} = 1,5 \cdot 8,1207 = 12,1811 \text{ кН}$$

Задача 11.5. На неподвижный цилиндр навита веревка, к одному из концов которой подвешен груз Q . (рис. 11.6).

Сколько раз надо намотать веревку на цилиндр, чтобы груз Q можно было удержать вертикальной силой P , приложенной к другому концу веревки? Коэффициент трения веревки о цилиндр равен f .

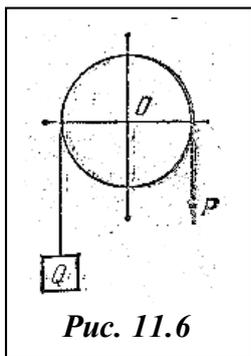


Рис. 11.6

Решение. Воспользуемся формулой Эйлера, согласно которой при предельном равновесии минимальное значение модуля силы P равно

$$P = Q e^{fa},$$

где a — угол охвата веревкой цилиндра. Этот угол равен

$$a = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n + \frac{\pi}{2} = \pi(2n + 1),$$

где n — число полных витков веревки, к которым добавляется по углу $\pi/2$ со стороны действия каждой из сил. Таким образом,

$$P = Qe^{-f\pi(2n+1)}.$$

Находим

$$\ln Q - \ln P = f\pi(2n+1),$$

Откуда

$$n = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln Q - \ln P}{f\pi} - 1 \right).$$

Задача 11.6. Прямолинейный стержень AB , длиной l и весом P , центр тяжести C которого находится от конца A на расстоянии $AC = a$, опирается в точке B на шероховатую вертикальную стену, и в точке A — на гладкий горизонтальный пол. Коэффициент трения между стержнем и вертикальной стеной f_1 . В точке A к стержню прикреплена нить, перекинутая через неподвижный круглый цилиндр (рис. 11.7). К концу нити подвешен груз Q . Коэффициент трения между нитью и цилиндром равен f .

Пренебрегая весом нити, определить, в каких границах может изменяться угол α при равновесии.

Решение. Рассмотрим равновесие стержня AB , отбросив мысленно вертикальную стену, горизонтальный пол и горизонтальную нить к заменив их действие реакциями. Отдельно рассмотрим равновесие нити, охватывающей цилиндр (рис. 11.7). Решение задачи распадается на два случая.

Случай минимального угла α . При этом точка A может начать двигаться влево, точка B — вниз. Следовательно, сила трения F будет направлена вверх (рис. 11.7), а силы трения, приложенные к нити на цилиндре (рис. 11.7), будут направлены по часовой стрелке. Таким образом, стержень AB (рис. 11.7) будет находиться в равновесии под действием следующих сил: нормальной реакции N , натяжения нити T , веса P , нормальной реакции R и силы трения F .

Составим уравнения равновесия для стержня AB :

$$\Sigma F_{kx} = T - R = 0, \quad (11.8)$$

$$\Sigma F_{ky} = N - P + F = 0, \quad (11.9)$$

$$\Sigma m_B(F_k) = -Nl \cos \alpha + P(l-a) \cos \alpha - Tl \sin \alpha = 0. \quad (11.10)$$

Кроме того, запишем зависимость силы трения от нормального давления в точке B :

$$F = f_1 R.$$

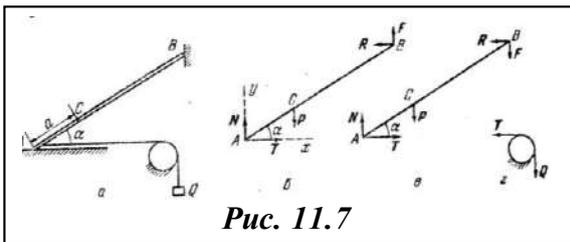


Рис. 11.7

Зависимость натяжения нити T от силы Q , с учетом того, что силы трения на цилиндре направлены по часовой стрелке, будет (формула Эйлера):

$$Te^{-f\pi/2} = Q.$$

Из данной системы уравнений найдем

$$N = P - f_1 Q e^{f\pi/2}.$$

Подставив значения N и T в уравнение (11.10), получим окончательно

$$\operatorname{tga} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{a}{l} e^{-f\pi/2} - f_1.$$

Этой формулой определяется минимальное значение угла α при равновесии стержня.

Случай максимального угла a . При этом точка A может начать двигаться вправо, точка B — вверх. Следовательно, сила трения F будет направлена вниз (рис. 11.7), а **силы трения**, приложенные к нити на цилиндре, будут направлены против часовой стрелки.

Уравнения равновесия стержня AB будут

$$\begin{aligned} T - R &= 0, \\ N - P - F &= 0, \\ -Nl \cos a + P(l - a) \cos a + Tl \sin a &= 0. \end{aligned}$$

Кроме того, зависимость силы трения от нормального давления в точке B определяется равенством

$$F = f_1 R.$$

Натяжение нити будет

$$T = Q e^{-f\pi/2}.$$

Из этой системы, исключив R и F , найдем

$$N = P + f_1 Q e^{-f\pi/2}.$$

Подставив в уравнение моментов значения N и T , получим

$$\operatorname{tga} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{a}{l} e^{f\pi/2} + f_1.$$

Этой формулой определяется максимальное значение угла α при равновесии.

При максимальном угле α_{\max} должно соблюдаться неравенство

$$\alpha_{\max} < \pi / 2$$

Следовательно, и

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{P}{Q} \cdot \frac{a}{l} e^{f\pi/2} + f_1 \right) < \frac{\pi}{2}.$$

б) Трение нити о цилиндрическую поверхность

Встречается скольжение гибких тел по неплоской поверхности. Например, нежелательное проскальзывание в ременной передаче ремня по шкиву, или троса, каната, на-

мотанного на неподвижный цилиндр.

Пусть имеется нить, перекинутая через неподвижную цилиндрическую поверхность (рис.11.8). За счёт сил трения натяжение левого и правого концов этой нити будут различными.

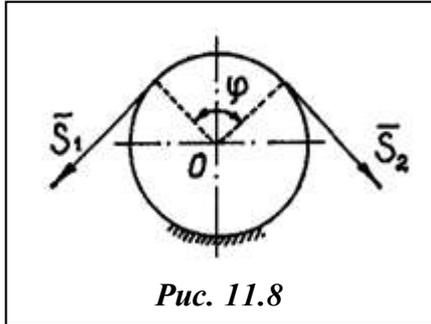


Рис. 11.8

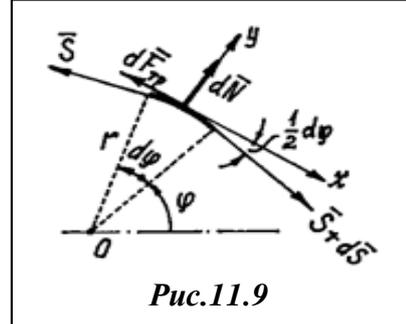


Рис.11.9

Предположим, что нормальная реакция и сила трения распределяются равномерно по дуге контакта нити на цилиндре. Рассмотрим равновесие участка нити длиной $dl = r \cdot d\varphi$. (рис.11.9). На левом конце этого участка натяжение \bar{S} , на правом $\bar{S} + d\bar{S}$. Составляем уравнения равновесия, проектируя силы на оси:

$$\Sigma X_i = 0; \quad -S \cos\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) - dF_{тр} + (S + dS) \cos\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad -S \sin\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) - dN - (S + dS) \sin\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) = 0;$$

Так как угол $d\varphi$ -малая величина, то полагаем $\sin\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) = \frac{1}{2} d\varphi$, $\cos\left(\frac{1}{2} d\varphi\right) = 1$. С учётом этого из уравнений находим $dF_{тр} = dS$, $dN = S d\varphi$ и, так как $dF_{тр} = f dN$, имеем $dS = f \cdot S d\varphi$ или $\frac{dS}{S} = f \cdot d\varphi$. Интегрируя, получим $\ln S \int_{S_2}^{S_1} = f \varphi \int_0^\varphi$. Или

$$\frac{S_2}{S_1} = e^{-f\varphi}$$

Этот результат называется **формулой Эйлера**.

Например, если нить перекинута через неподвижный шкив и $\varphi = \pi$, а коэффициент трения $f = 0,2$, то отношение натяжений $\frac{S_2}{S_1} = e^{-0,2\pi} = 0,533$. А, обернув цилиндр один раз

($\varphi = 2\pi$), $\frac{S_2}{S_1} = e^{-0,2 \cdot 2\pi} = 0,285$, то есть можно удержать груз на другом конце нити силой почти в три раза меньшей веса тела.

Возьмем деревянный цилиндр и положим его на стол так, чтобы он касался стола по образующей. В центры оснований цилиндра вставим концы проволочной вилки и прикрепим к ней снабженный очень чувствительный динамометр. Если тянуть за динамометр, то цилиндр

покатится по столу. По показаниям динамометра увидим, что нужна весьма небольшая сила тяги, чтобы сдвинуть с места цилиндр и катить его равномерно дальше, гораздо меньшая, чем при скольжении того же цилиндра, если бы он не вращался и скользил бы по столу. При той же силе давления на стол сила трения качения много меньше силы трения скольжения. Например, при качении стальных колёс по стальным рельсам трение качения примерно в 100 раз меньше, чем трение скольжения.

Происхождение трения качения. Когда шар или цилиндр катится по поверхности другого тела, он немного вдавливаясь в поверхность этого тела, а сам немного сжимается. Таким образом, катящееся тело всё время как бы вкатывается на горку. (рис. 11.10)

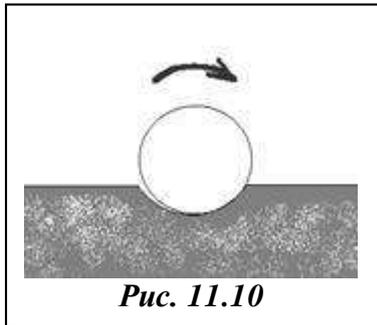


Рис. 11.10

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим круглый цилиндрический каток радиуса R и веса \bar{P} , лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости. Приложим к оси катка силу \bar{Q} (рис. 11.11, а), меньшую F_{np} . Тогда в точке A возникает сила трения \bar{F} , численно равная Q , которая будет препятствовать скольжению цилиндра по

плоскости.

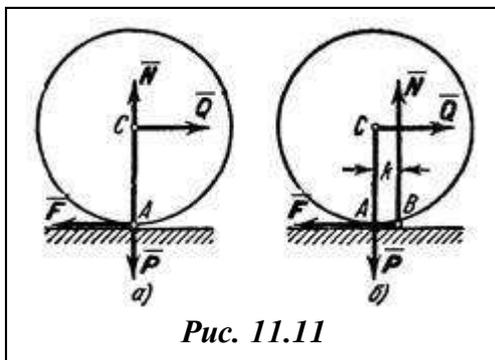


Рис. 11.11

Если считать нормальную реакцию \bar{N} тоже приложенной в точке A , то она уравновесит силу \bar{P} , а силы \bar{Q} и \bar{F} образуют пару, вызывающую качение цилиндра. При такой схеме качение должно начаться, как видим, под действием любой, сколь угодно малой силы \bar{Q} .

Истинная же картина, выглядит иначе.

Объясняется это тем, что фактически, вследствие деформаций тел, касание их происходит вдоль некоторой площадки AB (рис. 11.11, б).

При действии силы \bar{Q} интенсивность давлений у края A убывает, а у края B возрастает. В результате реакция \bar{N} оказывается смещенной в сторону действия силы \bar{Q} . С увеличением \bar{Q} это смещение растет до некоторой предельной величины k . Таким образом, в предельном положении на каток будут действовать пара (Q_{np}, \bar{F}) с моментом и уравновешивающая ее пара (N, P) с моментом Nk . Из равенства моментов находим или $Q_{np} = \frac{Nk}{R}$.

Входящая в формулу линейная величина k называется **коэффициентом трения качения**. Измеряют величину k обычно в сантиметрах. Значение коэффициента k зависит от материала тел

Коэффициент трения качения при качении в первом приближении можно считать не зависящим от угловой скорости качения катка и его скорости скольжения по плоскости.

Для вагонного колеса по рельсу $k=0,5$ мм. Рассмотрим движение ведомого колеса. Качение колеса начнется, когда выполнится условие $QR > M$ или $Q > M_{max} / R = kN / R$. Скольжение колеса начнется, когда выполнится условие $Q > F_{max} = fN$.

Если $k/R > f_0$, то колесо будет скользить по поверхности, без качения. Отношение k/R для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0 . Этим объясняется то, что в технике, когда это возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, шариковые подшипники и т. п.).

12. Равновесие при наличии силы трения покоя. Самоторможения

Возникновение трения обусловлено, прежде всего, шероховатостью поверхностей, создающей сопротивление перемещению, и наличием сцепления у прижатых друг к другу тел. Изучение всех особенностей явления трения представляет собою довольно сложную физико-механическую проблему.

В инженерных расчетах обычно исходят из установленных общих закономерностей, называемые законами трения скольжения при покое (**законами Кулона**):

При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сила сцепления), величина которой может принимать любые значения от нуля до значения $F_{пр}$, называемого предельной силой трения.

$$0 < \bar{F} < \bar{F}_{пр}$$

Силой трения скольжения \bar{F} (или просто силой трения) называется составляющая силы реакции связи, которая лежит в касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел.

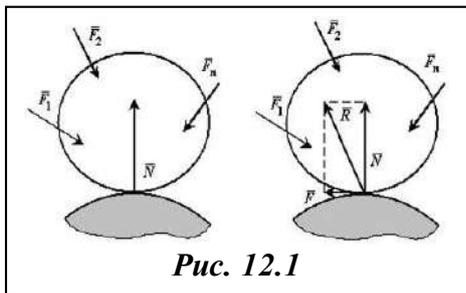


Рис. 12.1

Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело.

Сухим трением называется трение, когда между поверхностями соприкасающихся тел нет смазывающего вещества.

Будем рассматривать два случая: трение при покое или равновесии тела и трение скольжения при движении одного тела по поверхности другого с некоторой

относительной скоростью.

При покое сила трения зависит только от активных сил. При выбранном направлении касательной сила трения вычисляется по формуле:

$$\bar{F} = -\Sigma \bar{F}_{ti}$$

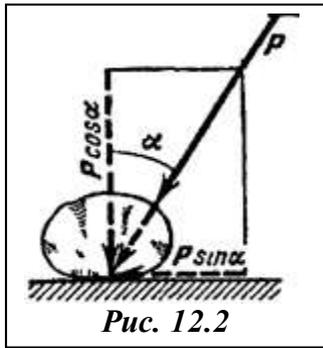
Аналогично при выбранном направлении нормали нормальная реакция выражается через заданные силы:

$$\bar{N} = -\Sigma \bar{F}_{ni}$$

При движении одного тела по поверхности другого сила трения является постоянной величиной. Величина предельной силы трения равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление или нормальную реакцию

Статический коэффициент трения f_0 — число отвлеченное $0 < f_0 < 1$; он определяется и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей (**характер обработки, температура, влажность, смазка и т. п.**). Коэффициент трения не зависит от скорости движения.

Предельная сила трения скольжения не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей. Из этого закона следует, что для того чтобы сдвинуть, например кирпич, надо приложить одну и ту же силу, независимо, от того, какой гранью он положен на поверхность, широкой или узкой.



Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу P , образующую угол α с нормалью (рис. 12.2), то тело сдвинется только тогда, когда сдвигающее усилие $P \sin \alpha$ будет больше $F_{\text{тр}} = f_0 P \cos \alpha$ (мы считаем $N = P \cos \alpha$, пренебрегая весом тела). Но неравенство $P \sin \alpha > f_0 P \cos \alpha$, в котором $f_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$, выполняется только при $\alpha > \varphi_0$, т.е. при $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \varphi_0$. Следовательно, никакой силой, образующей с нормалью угол α , меньший угла трения φ_0 , тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя. Этим объясняются известные явления **заклинивания или самостопора тел**.

Статический коэффициент трения f_0 — число отвлеченное $0 < f_0 < 1$; он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей (характер обработки, температура, влажность, смазка и т. п.). Считается, что коэффициент трения не зависит от скорости движения.

а) Трение верчения и его коэффициента

Приведению одного из тел во вращение по другому препятствуют силы трения скольжения, распределенные по площадке соприкосновения и определяющие в своей совокупности так называемое **трение верчения**.

Совокупность этих сил может быть приведена к паре, которая уравнивается парой, приложенной к телу и стремящейся повернуть его вокруг оси, перпендикулярной к площадке соприкосновения. **Предельную величину момента трения верчения M** принимают пропорциональной прижимающей силе N и определяют формулой

$$M = \mu N,$$

где μ — **коэффициент трения верчения**, зависящий от коэффициента трения скольжения « f ». При соприкосновении плоского основания круглого цилиндра радиуса « a » с плоской поверхностью будем иметь

$$\mu = \frac{\pi}{4} f_a \approx 0,79 f a$$

В случае соприкосновения тела, ограниченного поверхностью вращения, с телом, ограниченным плоской поверхностью, имеем

$$\mu = \frac{3\pi}{16} f_a \approx 0,59 f a,$$

где a — радиус образующейся при соприкосновении тел круговой площадки.

13. Равновесие при наличии трения скольжения. Законы Кулона

Сила трения скольжения — сила, возникающая между соприкасающимися телами при их относительном движении.

Установлено, что сила трения зависит от силы давления тел друг на друга (силы реакции опоры), от материалов трущихся поверхностей, от скорости относительного движения. Так как никакое тело не является абсолютно ровным, сила трения не зависит от площади соприкосновения, и истинная площадь соприкосновения гораздо меньше наблюдаемой; кроме того, увеличивая площадь, мы уменьшаем удельное давление тел друг на друга.

Величина, характеризующая трущиеся поверхности, называется **коэффициентом трения**. Она зависит от природы и качества обработки трущихся поверхностей и от скорости. Величина силы трения скольжения.

$$F_{тр} = k \cdot N$$

где k – коэффициент трения скольжения, N – сила нормальной реакции опоры.

Первый закон. Сила трения скольжения равна сдвигающей силе и заключена между нулем и максимальным значением, которое достигается в момент выхода тела из положения равновесия

$$0 \leq F_{тр} \leq F_{тр/макс}$$

(Условие отсутствия скольжения тела).

Второй закон. Максимальная сила трения скольжения при всех прочих условиях не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей.

Третий закон. Максимальная сила трения скольжения пропорциональна силе нормального давления тела на опорную поверхность.

$$F_{тр/макс} = fN$$

(Условие начала скольжения тела).

$$N = -Q; \quad N = Q;$$

N - нормальная реакция опорной поверхности;

Q - сила давления тела на эту поверхность.

Безразмерный коэффициент f называют **коэффициентом трения скольжения** или **коэффициентом трения 1-го рода**.

Четвертый закон. Коэффициент трения скольжения зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей (степени шероховатости, влажности, температуры и других условий).

14. Проскальзывание при качении абсолютно жесткого катка

Подставим в известное равенство, представленное Глаголевым Н.И. [4] $p = qtg(\varphi + \theta_1)$ выражения усилий P и S . Согласно соотношениям по данным Fromm Н [3]. $P = Au_1q = Bv$, и далее, исключим из него перемещения и V . В результате получим следующее уравнение для отыскания угла θ_1 (и далее угла $\vartheta = \theta_1 - \theta$ по заданным θ и α , справедливое в данной зоне:

$$A(\sin \theta_1 - \sin \theta) = B(\cos \theta_1 - \cos \alpha)tg(\varphi + \theta_1). \quad (14.1)$$

Уравнение (14.1) допускает при $\theta = \pm \alpha$ корень $\theta_1 = \theta$. Это означает, что если исследуемая зона примыкает к заднему краю области контакта с основанием, то она оканчивается в точке с координатой

$$\xi = -\alpha = -R \sin \alpha \quad (14.2)$$

Действительно, имея $\theta_1 = \theta + \theta_1$ и $u = R(\sin \theta_1 - \sin \theta)$, $v = R(\cos \theta_1 - \cos \alpha)$, угол ϑ и перемещения u и v обращаются при $\theta_1 = \theta = \alpha$ в нуль.

Заменим посредством равенства $\theta_1 = \theta + \vartheta$ в уравнении (14.1) неизвестную θ_1 на ϑ и представим его в следующем виде

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{B}{2A} \frac{tg(\varphi + \theta + \vartheta)}{\cos(\theta + \frac{1}{2}\vartheta)} [\cos(\theta + \vartheta) - \cos \alpha] \quad (14.3)$$

При малых значениях углов θ , α , ϑ , а также угла трения φ разложение правой части уравнения (14.3) в степенной ряд начинается с членов третьего порядка малости. Поэтому имеем следующее равенство:

$$\vartheta = (\theta) = \frac{B}{2A} (\varphi + \theta)(\alpha^2 - \theta^2) \quad (14.4)$$

При значительном трении в этой формуле следует заменить множитель $(\varphi + \theta)$ на $tg(\varphi + \theta)$. Тогда будем иметь в этом случае для функции $\vartheta(\theta)$ следующее выражение:

$$\vartheta(\theta) = f \frac{B}{2A} (\alpha^2 - \theta^2), \quad f = tg \varphi. \quad (14.5)$$

Рассмотрим числовой расчет.

Пусть $\sin \alpha = 0,15$ ($\alpha = 0,1506$), $tg \varphi = 0,100$ ($\varphi = 0,0968$), $A = B$. Результаты вычислений значений функции $\vartheta(\theta)$ представлены в таблице 1.

В колонке ϑ_0 приведены результаты вычислений по формулам (14.4), в колонке ϑ_1 -по формуле (14.3), в колонке ϑ_2 приведены результаты последующих вычислений.

На определение вида функции $\vartheta(0)$ в исследуемой зоне равенство (14.4), справедливое для всех точек зоны обращается в равенство (14.2). Поэтому достаточно изменить знак у угла трения φ в формуле (14.4), чтобы получить формулу для $\nu(\theta)$, справедливую в зоне, а именно:

$$\vartheta(\theta) = -\frac{B}{2A}(\varphi - \theta)(\alpha^2 - \theta^2). \quad (14.6)$$

Для значений функции $\vartheta(\theta)$ в исследуемой области можно записать, следующую формулу:

$$\vartheta(\theta) = \left(\frac{\omega R}{V_0} - 1 \right) \theta - \frac{\omega R}{6V_0} \theta^3 + const. \quad (14.7)$$

Введем в рассмотрение параметров значение меры кажущегося проскальзывания S

$$s = 1 - \frac{\omega R}{V_0} \quad (14.8)$$

Используя выражения (14.8), можно формулу (14.7) представить в виде

$$\nu(\theta) = -s\theta - \frac{1}{6}(1-s)\theta^3 + const \quad (14.9)$$

Таблица 1

θ/α	$\vartheta_0 \cdot 10^4$ (4)	$\vartheta_1 \cdot 10^4$ (3)	$\vartheta_2 \cdot 10^4$	θ/α	$\vartheta_0 \cdot 10^4$	$\vartheta_1 \cdot 10^4$	$\vartheta_2 \cdot 10^4$
-0,9	-0,7728	-0,7808	-	0	11,30	11,44	11,44
-0,8	-0,8486	-0,8540	-	0,1	12,88	13,03	-
-0,7	-0,3321	-0,3346	-	0,2	14,13	14,29	-
-0,6	0,6766	0,6830	-	0,3	14,95	15,11	-
-0,5	2,074	2,098	2,095	0,4	15,23	15,35	-
-0,4	3,757	3,802	-	0,5	14,88	14,97	14,96
-0,3	5,624	5,596	-	0,6	13,80	13,84	-
-0,2	7,572	7,672	-	0,7	11,86	11,45	-
-0,1	9,499	9,626	-	0,8	8,983	8,972	-
				0,9	5,069	5,040	-

Представим результаты (14.9), (14.4), (14.6) построения функции $\vartheta(0)$ -вместе с условиями

$$V_0 - \omega R \cos \theta_1 > \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, V_0 - \omega R \cos \theta_1 < \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \text{ в виде (табл. 2).}$$

Рассмотрим условия для исследуемой зоны. Учитывая, что, согласно $f = \operatorname{tg} \varphi$, $f = \operatorname{tg} \varphi$, их можно представить в виде

$$-tg\varphi(p \sin \theta_1 + q \cos \theta_1) \leq -p \cos \theta_1 + q \sin \theta_1 \leq tg\varphi(p \sin \theta_1 + q \cos \theta_1), \quad (14.10)$$

откуда аналогично равенства имеем

$$-qtg(\varphi - \theta_1) < p < qtg(\varphi + \theta_1). \quad (14.11)$$

Заменяя здесь усилия p и q , получим,

$$-\frac{B}{A}Vtg(\varphi - \theta_1) < u < \frac{B}{A}gtg(\varphi + \theta_1). \quad (14.12)$$

Преобразуя формулы для смещений u и v , и придем к выражениям

$$u = Rv \cos \theta, \quad v = R(\cos \theta - \cos \alpha) - Rv \sin \theta \quad (14.13)$$

Подставим полученные выражения для u и v в неравенства (14.12) и вновь заменяя θ_1 на v , получим

$$-\frac{B}{A} \left[tg(\varphi - \theta)(\cos \theta - \cos \alpha) - v \frac{\cos \theta - \cos \alpha}{\cos^2(\varphi - \theta)} - vtg(\varphi - \theta) \sin \theta \right] \leq v \sin \theta \leq \frac{B}{A} \left[tg(\varphi + \theta)(\cos \theta - \cos \alpha) + v \frac{\cos \theta - \cos \alpha}{\cos^2(\varphi - \theta)} - vtg(\varphi + \theta) \sin \theta \right] \quad (14.14)$$

Таблица 2

зона	$v(0)$	Необходимые условия существования зоны
1	$s\theta - 1/6(1-s)\theta^3 + \text{const}$	$ -p \cos \theta_1 + q \sin \theta_1 \leq f(p \sin \theta_1 + q \cos \theta_1)$
2	$\frac{B}{2A}(\varphi + \theta)(\alpha^2 - \theta^2)$	$V_0 - \omega R \cos \theta_1 > \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$
3	$\frac{B}{2r}(\varphi - \theta)(\alpha^2 - \theta^2)$	$V_0 - \omega R \cos \theta_1 < \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$

Таким образом, при качении абсолютно жесткого катка по абсолютно жесткому основанию имеем **1. $V_0 = \omega R$, следовательно, $s = 0$.** **2.** При перекатывании по деформируемому основанию ведомый каток, как правило, за один оборот перемещается на расстояние, большее длины своей окружности. Следовательно, в этом случае $V_0 > \omega R$, и кажущееся проскальзывание s положительно. **3.** Для ведущего катка, напротив, $\omega R > V_0$ и $s < 0$.

15. Относительное скольжение поверхности катка

В рассматриваемой точке поверхность катка скользит по основанию вперед в сторону движения центра катка. Это возможно при условии $V_x > V_x^I$. Учитывая формулу Reynolds [2], имеем

$$V_0 = \omega R \cos \theta_1 > \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (15.1)$$

Касательная составляющая реакции основания r_v в этом случае направлена против скорости центра катка, поэтому имеем $r_r = -fr_v$, или

$$-p \cos \theta_1 + q \sin \theta_1 = f(p \sin \theta_1 + q \cos \theta_1) \quad (15.2)$$

Равенство (15.2) и неравенство (15.1) определяют часть области контакта, где происходит проскальзывание поверхности катка по поверхности основания вперед.

В следующем случае в рассматриваемой точке происходит относительное скольжение поверхности катка назад по основанию, т.е. в сторону, противоположную движению его центра. При этом должны соблюдаться неравенство, представленное Глаголевым Н.И. [4].

$$V_0 = \omega R \cos \theta_1 < \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \quad (15.3)$$

и равенство $r_r = fr_v$, т.е.,

$$-p \cos \theta_1 + q \sin \theta_1 = f(p \sin \theta_1 + q \cos \theta_1), \quad (15.4)$$

которые характеризуют проскальзывание поверхности катка по поверхности основания в направлении, обратном движению центра катка.

Запишем формулы, определяющих выражение для перемещений u и \mathcal{G} по Porietsky Н.

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \mathcal{G}(x,t) = \mathcal{G}(\xi). \quad (15.5)$$

Введем подвижную систему координат $\xi\eta$ с началом в центре катка О(рис 15.1). Ось η этой системы направлена вертикально вниз, а ось ξ - в сторону движения катка параллельно недеформированной границе основания. Пусть расположение осей неподвижной системы координат xu таково, что в мгновение времени $t=0$ они соответственно совпадают с осями ξ и η

Горизонтальная и вертикальная составляющие смещения торца элементарного упругого стержня основания $u = u(x,t)$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x,t)$, могут рассматриваться также и как функции $\dot{u}(\xi, t)$ и $v(\xi, t)$ переменных ξ и t , если через ξ обозначить координату торца упругого стержня в системе $\xi\eta$ в предположении отсутствии деформации основания.

Однако, если скорость центра катка V_0 и его угловая скорость ω постоянны, то по отношению к системе координат $\xi\eta$ основание находится в состоянии стационарного движения. Следовательно, в этом случае перемещения u и \mathcal{G} являются функциями только

одной переменной ξ , т.е.

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \vartheta(x, t) = \vartheta(\xi). \quad (15.5)$$

Имея в виду равенство по данным Fromm Н. [3],

$$x = V_0 t + \xi \quad (15.6)$$

получаем, в частности, тождество

$$u(x, t) = u(V_0 t + \xi, t) = u(\xi) \quad (15.7)$$

Отсюда, дифференцируя по ξ и по t и учитывая, что согласно (15.6), $\partial x / \partial \xi = 1$, $\partial x / \partial t = V_0$ и, кроме того, $u(\xi)$ не зависит от t , имеем,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (15.8)$$

Из полученных соотношений следует

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} V_0 = -V_0 \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi}. \quad (15.9)$$

Последние равенства справедливы и в случае, когда скорость центра катка V_0 переменна.

Заметим, что частная производная от горизонтального перемещения по переменной x и равная ей обыкновенная производная от функции $u(\xi)$ по ξ представляют собой продольную деформацию материала основания в направлении движения катка.

Соотношения, аналогичные (15.8) и (15.9), имеют место и для вертикальных смещений $v(x, t)$ и $v(\xi)$ точек основания.

В зоне относительного скольжения, согласно соотношению (15.9), имеем,

$$-V_0 \frac{du(\xi)}{d\xi} = V_0 - \omega R \cos \theta_1. \quad (15.10)$$

По формуле Fromm Н.В. (15.5) запишем выражение,

$$\xi + u(\xi) = R \sin \theta_1, \quad (15.11)$$

и, следовательно, угол θ_1 можно рассматривать как функцию ξ . Поэтому в результате

дифференцирования получаем

$$1 + \frac{du(\xi)}{\alpha \xi} = R \cos \theta_1 \frac{d\theta_1}{d\xi} \quad (15.12)$$

Исключая посредством этого равенства $du(\xi) \setminus d\xi$, из (10), приходим к формуле

$$\frac{d\theta_1}{d\xi} = \frac{\omega}{V_0} \quad (15.13)$$

из которой следует, что в данной зоне имеет место зависимость,

$$\theta_1 = \frac{\omega}{V_0} \xi + const. \quad (15.14)$$

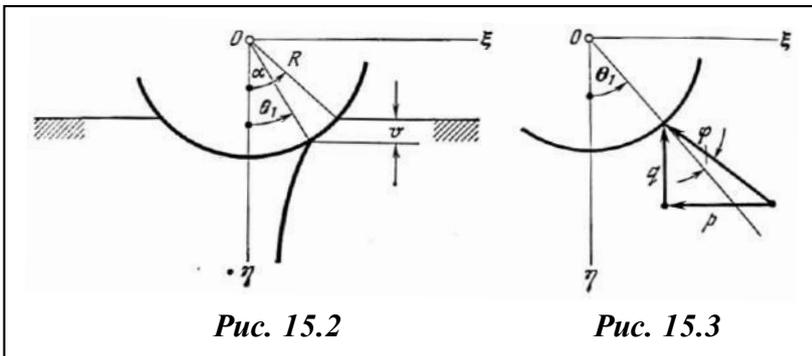


Рис. 15.2

Рис. 15.3

В дальнейшем вместо координаты ξ удобно ввести угол θ между вертикалью и радиусом катка, проведенным к точке пересечения окружности катка с осью элементарного стержня в недеформированном состоянии последнего. Нетрудно видеть (рис.15.1), что

$$\xi = R \sin \theta$$

Полагая далее

$$\theta_1 = \theta + \vartheta,$$

получим, согласно равенству (15.14), формулу

$$\vartheta = \frac{\omega R}{V_0} \sin \theta - \theta + const, \quad (15.17)$$

справедливую в той части области контакта, где относительное проскальзывание поверхностей катка и основания отсутствует.

Значение угла ϑ как функции переменной θ вполне определяет перемещение u и v точек основания, если только известен угол α , который образует с вертикалью радиус катка, проведенный к торцу элементарного упругого стержня, вступающего в данное мгновение в контакт с катком.

Действительно (рис.15.1 и 15.2) имеем

$$u = R(\sin \theta_1 - \sin \theta), \quad \mathcal{G} = R(\cos \theta_1 - \cos \alpha), \quad (15.18)$$

где следует вместо θ_1 подставить его выражение согласно формулы (15.16).

Чтобы найти значение функций $\mathcal{G}(\theta)$ в исследуемой зоне, положим сначала в равенстве (15.2)

$$f = tg \varphi, \quad (15.19)$$

где φ - угол трения, после чего оно приводится к виду

$$p = qtg(\varphi + \theta_1). \quad (15.20)$$

Таким образом равенство (15.20) означает, что в зоне относительного скольжения полная реакция основания Γ отклоняется на угол трения φ от нормали к поверхности контакта в сторону, противоположную направлению относительного скольжения поверхности катка по поверхности.

16. Условия равновесия твердого тела на шероховатой поверхности. Заклинивание

При решении задач мы пренебрегаем трением и считаем поверхности связей гладкими, а их реакции направленными по нормальным к этим поверхностям. Реакция реальной (шероховатой) связи будет складываться из двух составляющих: из нормальной реакции \vec{N} и перпендикулярной к ней силы трения \vec{F} . Следовательно, полная реакция \vec{R} будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до $F_{\text{пр}}$ сила R будет меняться от N до $R_{\text{пр}}$, а ее угол с нормалью будет расти от нуля до некоторого предельного значения φ_0 (Рис. 16.1).

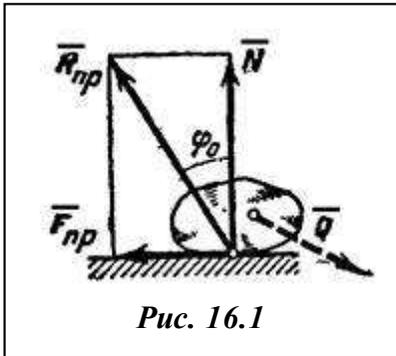


Рис. 16.1

Для равновесия твердого тела на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы линия действия равнодействующей активных сил, действующих на твердое тело, проходила внутри конуса трения или по его образующей через его вершину.

Тело нельзя вывести из равновесия любой по модулю активной силой, если ее линия действия проходит внутри конуса трения.

Изучение равновесия тел с учетом трения сводится обычно к рассмотрению предельного положения равновесия, когда сила трения достигает своего наибольшего значения $F_{\text{пр}}$.

При аналитическом решении задач реакцию шероховатой связи в этом случае изображают двумя составляющими N и $F_{\text{пр}}$. Затем составляют обычные условия равновесия статики, подставляют в них вместо $F_{\text{пр}}$ величину $f_0 N$ и, решая полученные уравнения, определяют искомые величины.

Пример 16.1. Рассмотрим тело, имеющее вертикальную плоскость симметрии (рис. 16.2). Сечение тела этой плоскости имеет форму прямоугольника. Ширина тела равна $2a$.

К телу в точке C , лежащей на оси симметрии, приложена вертикальная сила \vec{Q} и в точке A , лежащей на расстоянии h от основания, горизонтальная сила \vec{P} . Реакция плоскости основания (реакция связи) приводится к нормальной реакции \vec{N} и силе трения \vec{F} . Линия действия силы \vec{N} неизвестна. Расстояние от точки C до линии действия силы \vec{N} обозначим x ($x \leq 0$).

Составим три уравнения равновесия:

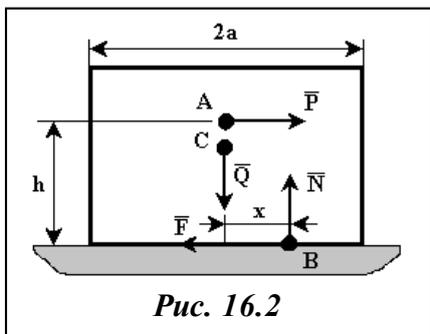


Рис. 16.2

$$\Sigma F_{ix} = 0 \quad P - F = 0 \Rightarrow F = P$$

$$\Sigma F_{iy} = 0 \quad N - Q = 0 \Rightarrow N = Q$$

$$\Sigma M_B(\vec{F}_i) = 0 \quad Q \cdot x - P \cdot h = 0 \Rightarrow x = P \cdot h / Q \leq \alpha$$

$$\text{Согласно закону Кулона } F \leq f \cdot N, \text{ т.е. } P \leq f \cdot Q.$$

$$(16.1)$$

$$\text{Так как } P \cdot \frac{h}{Q} \leq \alpha, \text{ то } P \leq \frac{\alpha}{h} Q. \quad (16.2)$$

Проанализируем полученные результаты:

Будем увеличивать силу \vec{P} .

Если $f < a/h$, то равновесие будет иметь место до тех пор, пока сила трения не достигнет своей предельной величины, условие (16.1) превратится в равенство. Дальнейшее увеличение силы приведет к скольжению тела по поверхности.

Если $f > a/h$, то равновесие будет иметь место до тех пор, пока сила трения не достигнет величины $a \cdot Q/h$, условие (16.2) превратится в равенство. Величина x будет равна h . Дальнейшее увеличение силы приведет к тому, что тело станет опрокидываться вокруг точки B (скольжения не будет).

Пример 16.2. На какое максимальное расстояние α может подняться человек по лестнице, приставленной к стене (рис.16.3) Если вес человека – P , коэффициент трения скольжения между лестницей и стеной – f_1 , между лестницей и полом – f_2 .

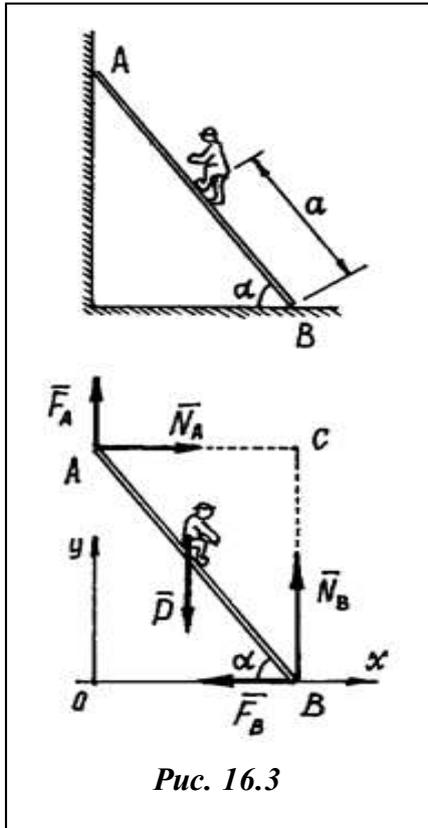


Рис. 16.3

Рассматриваем равновесие лестницы с человеком. Показываем силу \vec{P} , нормальные реакции \vec{N}_A и \vec{N}_B и добавляем силы трения: $F_A = f_1 \cdot N_A$ и $F_B = f_2 \cdot N_B$.

Полагаем, что человек находится на расстоянии $\alpha = \alpha_{\max}$, при большем значении которого начнётся движение лестницы. Составляем уравнения равновесия.

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; N_A - F_B = 0; \\ \sum Y_i &= 0; F_A - P + N_B = 0; \\ \sum Z_i &= 0; -F_A l \cos \alpha + P_A \alpha \cos \alpha - F_B l \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

Подставив значения сил трения и решив систему уравнений, получим

$$\alpha = l \frac{f_2}{1 + f_1 \cdot f_2} (f_1 + tg \alpha)$$

Определим угол α под которым надо поставить лестницу, чтоб добраться до стены. Полагая $\alpha = l$, получим, $ctg \alpha = f_2$ и $\alpha = arctg f_2$

Заметим, что если равнодействующая \vec{Q} всех активных сил (всех кроме реакций) направлена под углом α (рис.16.4), то нормальная реакция $N = Q \cos \alpha$, а сила трения

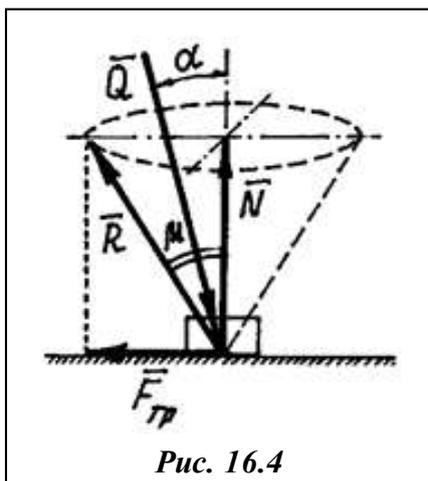


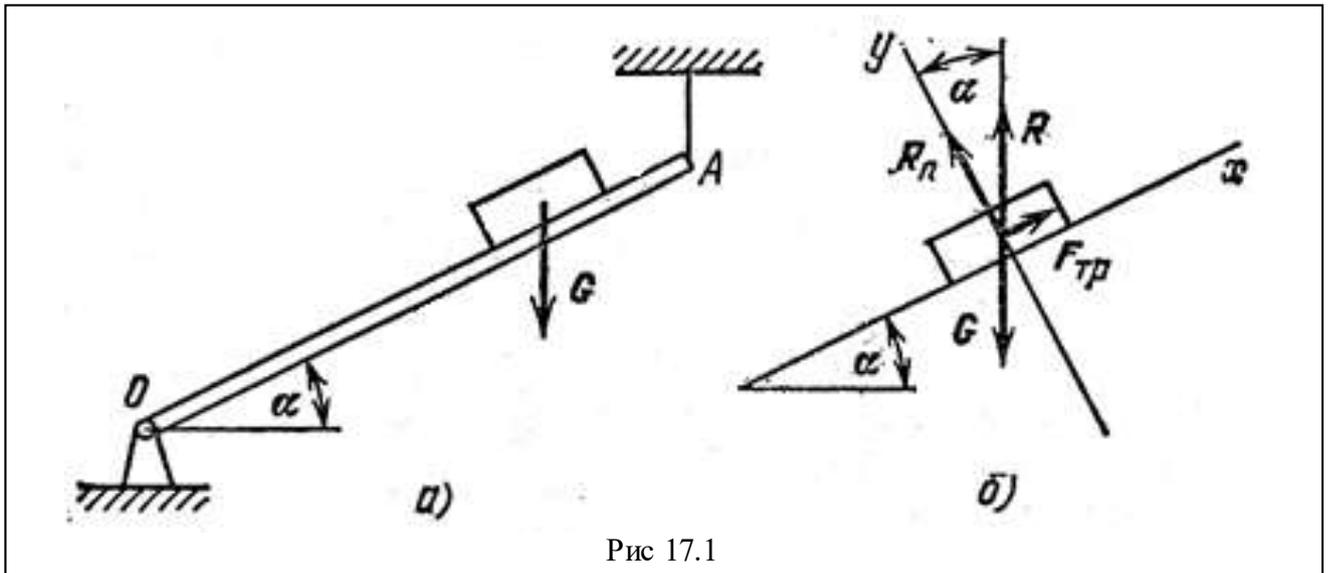
Рис. 16.4

$F_{тр} = fN = fQ \cos \alpha$. Для того, чтобы началось скольжение должно выполняться условие $Q \sin \alpha > fQ \cos \alpha$ или $tg \alpha > f$. И так как $f = tg \mu$, то $tg \alpha > tg \mu$. Значит угол α должен быть больше угла μ . Следовательно, если сила \vec{Q} действует внутри угла или конуса трения ($\alpha < \mu$), то как бы не была велика эта сила, скольжение тела не произойдёт. Такое условие называется **условием заклинивания** или **условием самоторможения**.

17. Примеры на определение угла и коэффициента трения

Пример 17.1. Определить при каком значении угла α , образованного шероховатой наклонной плоскостью с горизонтом, находящийся на ней груз силы тяжести G начнет скользить, Коэффициент трения скольжения равен f (рис, 17.1)

Решение. Внешней связью по отношению к грузу служит наклонная плоскость, со стороны которой на груз действуют две силы: нормальная реакция R_n и сила трения F_{TP} (рис. 17.1).

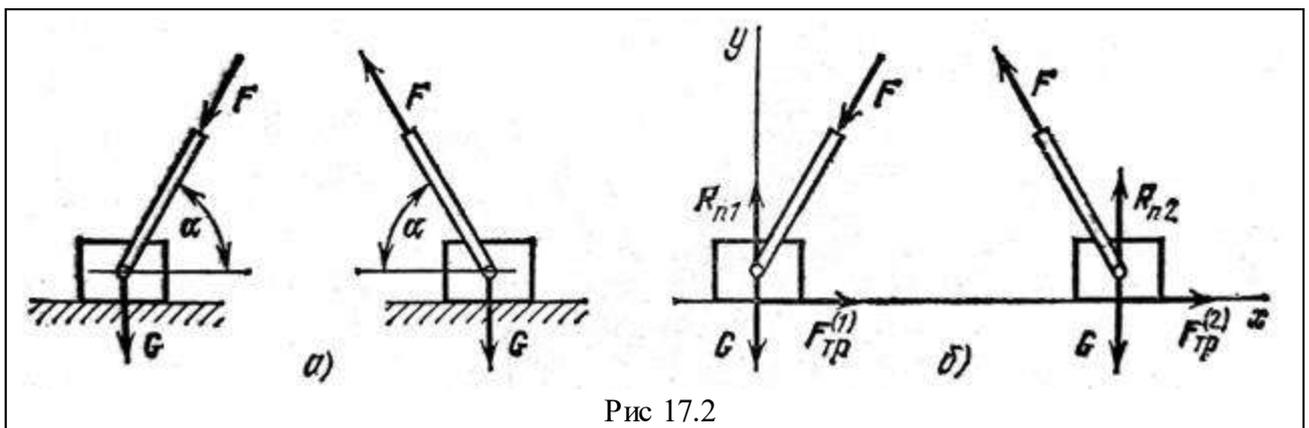


Выбрав систему координат, (рис, 17.1, б), запишем уравнения равновесия груза

$$\Sigma X = F_{mp}^{\max} - G \sin \alpha = 0, \quad \Sigma Y = R_n - G \cos \alpha = 0.$$

Из последнего уравнения находим $R_n = G \cos \alpha$, а так как $F_{TP}^{\max} = f R_n$, то $f R_n = G \sin \alpha$, или $f G \cos \alpha = G \sin \alpha$, и $f = \operatorname{tg} \alpha$, т. е., $\alpha = \operatorname{arctg} f$. При $\alpha > \operatorname{arctg} f$ начнется движение. Полученный результат можно использовать для определения приближенных значений коэффициентов трения различных материалов. Измерив угол α , при котором начинается движение, полагают $f = \operatorname{tg} \alpha$.

Пример 17.2. При разработке механизма необходимо использовать ползун, движущийся по шероховатой направляющей и приводимый в движение стержнем (рис. 17.2)



а). Предполагается, что модуль силы тяжести G ползуна, соизмерим с модулем силы F передаваемой стержнем. Как выгоднее спроектировать конструкцию — с толкающим или тянущим стержнем?

Решение. Внешней связью по отношению к системе ползун — стержень является шероховатая направляющая, со стороны которой на ползун действуют нормальная реакция R_n и сила трения F_{TP} (рис. 17.2 б).

1. Согласно формулы $F_{\max} = fR_n$ модуль силы трения будет тем меньше, чем меньше модуль нормальной реакции. Найдем R_{n1} и R_{n2} . Индексами 1 и 2 отмечены, соответственно, случаи толкающего и тянущего стержней. Для этого запишем уравнения равновесия в проекциях на ось Oy :

для случая толкающего стержня

$$R_{n1} - G - F \sin \alpha = 0, \quad (17.1)$$

для случая тянущего стержня

$$R_{n2} - G + F \sin \alpha = 0, \quad (17.2)$$

Из уравнений (17.1), (17.2) имеем

$$R_{n1} = G + F \sin \alpha, \quad (17.3)$$

$$R_{n2} = G - F \sin \alpha, \quad (17.4)$$

Сравнивая (17.3) и (17.4), получим

$$G + F \sin \alpha > G - F \sin \alpha,$$

т. е. $R_{n1} > R_{n2}$; следовательно, учитывая, что $F_{TP}^{(1)} = fR_{n1}$, а $F_{TP}^{(2)} = fR_{n2}$, имеем

$$F_{TP}^{(1)} > F_{TP}^{(2)}. \quad (17.5)$$

В соответствии с неравенством (17.5) следует использовать **конструкцию с тянущим стержнем.**

18. О скачках при трении

В литературе имеется значительное число заметок и статей о скачкообразном перемещении и касающихся поверхностей, наблюдаемом при малых скоростях скольжения [16].

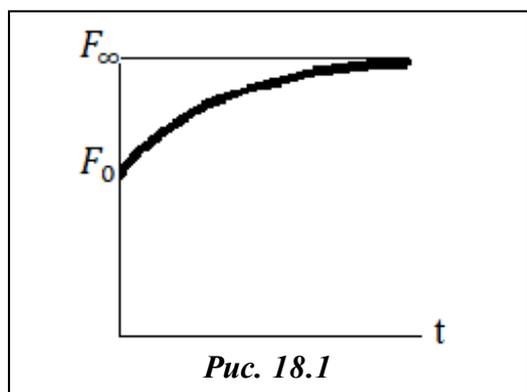
Указанное явление было положено в основу теории сухого трения, предложенной Боуденом, причиной трения являлось сваривание в точках контакта соприкасающихся поверхностей, периодически возникающее при их скольжении. Это явление и вызывает скачкообразное перемещение поверхностей.

Хайкин [16] указал на недостаточность утверждений Боудена, доказав, что скачки при трении являются механическими релаксационными колебаниями.

Некоторые исследователи показали, что скачки зависят от механических параметров характеризующих силу трения [16]. В одном из номеров «Nature» [8] Боуден указал, что наличие скачков, безусловно, должно зависеть от механических параметров **система**. Однако он полагал, что сами неровности соприкасающихся поверхностей, обладая некоторой упругостью, как раз и являются причиной скачков. Последнее утверждение не может быть правильным, так как в этом случае частота колебаний такой системы должна быть очень высокой. Вместе с тем практически наблюдаемые колебания имеют небольшую частоту.

В чем же истинная причина скачков при трении и каковы условия их существования. Анализ явления скачков представляет прикладное значение (вибрация при обработке металлов резанием, невозможность в ряде случаев медленного плавного взаимного перемещения частей механизмов и др.)

Известно, что: 1) скачки, возникающие при малых скоростях взаимного скольжения, исчезают при увеличении этой скорости: 2) амплитуда и частоты скачков зависят от скорости скольжения, массы ползуна и жесткости системы: 3) первый скачок значительно больше последующих.



Хайкин отметил, что скачки будут непременно иметь место, если система обладает некоторой упругостью, а сила трения рассматриваемая как функция скорости скольжения, имеет так называемую падающую характеристику. Однако эти предположения не объясняют, почему амплитуда скачков падает при увеличении скорости скольжения, при первом скачке оказывается больше последующих.

Однако сила трения как функция скорости скольжения в зоне малых скоростей имеет [16], напротив возрастающую характеристику. Указанное согласуется с представлением механизма трения как процесса вязкого разрушения материала в области контакта трущихся тел.

Объяснение явления скачков при трении следует базировать на учете возрастания силы трения трогания с места и зависимости от продолжительности неподвижного контакта.

1. Примем, что сила трения трогания с места является заданной возрастающей функцией $F(t)$ продолжительности t соприкосновения двух при отсутствии проскальзывания между ними. Примерный вид функции $F(t)$ изображен на рис. 18.1. Зависимость

$$F(t) = F_0 - (F_\infty - F_0)e^{-at} \quad (18.1)$$

достаточно удовлетворительно представляет эту функцию, Здесь F_0 -значение силы трения трогания с места при большой продолжительности соприкосновения тел без взаимного

скольжения; F_0 -значение той же силы при практически отсутствующем времени неподвижного контакта; α -коэффициент, зависящий от свойств трущихся тел, степени их обработки, вида смазки и др. Конечно,

$$F_{\infty} > F_0 \quad (18.2)$$

Примем, что значение силы трения движения (т.е. при скольжении тел друг по другу) также равно F_0 и от скорости скольжения одного тела по другому не зависит.

Анализ явления прерывистого движения или скачков при трении произведем на примере скольжения тела относительно шероховатой плоскости (рис.18.2).

Пусть связанное пружиной C жесткости K с неподвижным предметом, лежит на шероховатой плоскости B . Плоскость приходит в движение, увлекая за собой тело и производя тем самым натяжение пружины с силой

$$P = Kx_0 \quad (18.3)$$

где x_0 -смещение тела от положения, при котором пружина не натянута.

Тело A будет двигаться вместе с плоскостью B до тех пор, пока натяжение P пружины C не достигнет величины силы трения трогания с места $F(t)$, соответствующей предшествующему времени t соприкосновения тела с плоскостью. В частности, если тело A до начала движения плоскости B лежало на ней достаточно долгое время, то можно положить

$$Kx_0 = F_{\infty} \quad (18.4)$$

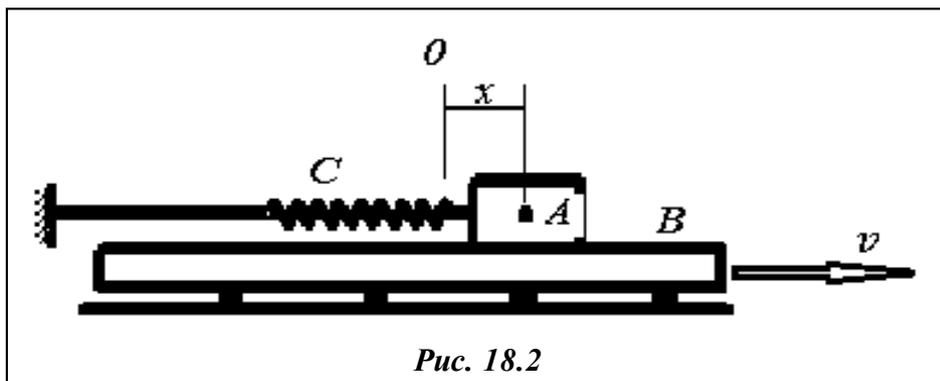


Рис. 18.2

где x_0 - значение перемещения x , при достижения которого начинается скольжение (скачок) тела A по плоскости B . Это скольжение происходит при наличии двух сил, действующих на тело A : 1) предполагаемой

постоянной силы трения движения F_0 , направленной в сторону движения плоскости, и 2) силы упругости пружины P , выражающейся формулой.

Под действием упомянутых двух сил дальнейшее движение тела будет происходить по гармоническому закону около положения равновесия $x = a$ (рис.18.3) которое определяется из соотношения

$$Ka = F_0 \quad (18.5)$$

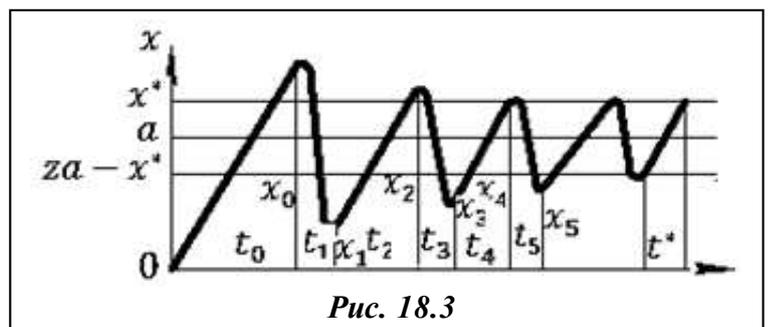


Рис. 18.3

В начале скольжения тело A имело смещение x_0 и скорость v . Следовательно, тело A

сперва будет продолжать двигаться в том же направлении, что и точки плоскости В, постепенно уменьшая свою скорость и отставая от них. Далее скорость тела переменит знак и оно начнет движение в обратном направлении сначала с увеличивающейся по абсолютному значению скоростью.

После того как тело пройдет положение, соответствующее смещению $x = a$ при котором сила трения равна силе упругости пружины, скорость тела по модулю будет вновь уменьшаться пока опять не переменит знак, и тело станет двигаться с возрастающей скоростью уже в сторону движения плоскости В. При некотором смещении $x = x_1$ скорость тела А окажется равной скорости плоскости В, т.е. величине v .

Так как движение тела происходит по гармоническому закону, то смещения тела, соответствующие одному и тому же значению скорости, симметричны относительно положения равновесия. Следовательно,

$$\frac{(x_0 + x_1)}{2} = a \quad (18.6)$$

откуда

$$x_1 = 2a - x_0 \quad (18.7)$$

После достижения скоростью Тела А значения v оно перестает скользить по плоскости В и совершает дальнейшее уже вместе с плоскостью вплоть до нового скачка. Действительно, тело А не может опередить плоскость В, так как в этом случае сила трения переменяла бы знак и на тело действовала бы в направлении движения плоскости сила

$$-Kx_1 - F_0 = -K(2a - x_0) - F_0 = F_\infty - 3F_0 \quad (18.8)$$

Однако последняя отрицательна (если F_∞ превосходит F_0 меньше чем в три раза) и скорость тела возрастать не может.

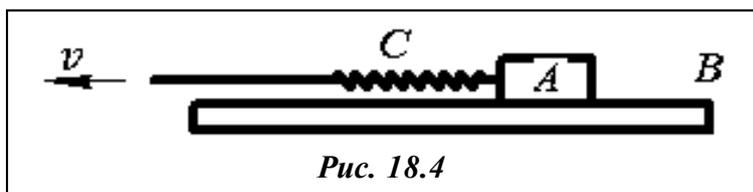
Если обозначим через t_2 время, в течение которого тело А после прекращения скольжения будет двигаться вместе с плоскостью В, и через x_2 - смещение тела в мгновение начала нового скачка, то, очевидно, будет справедливо равенство

$$x_2 = x_1 + vt_2 \quad (18.9)$$

С другой стороны, в это мгновение имеет место равенство силы натяжения пружины Kx_2 и силы трения трогания с места, величина которой определяется теперь временем t_2 соприкосновения без скольжения тела А с плоскостью В после первого скачка. Поэтому справедливо равенство

$$Kx_2 = K(x_1 + vt_2) = F_0, \quad (18.10)$$

позволяющее найти, зная функцию $F(t)$, интервал времени t_2 и смещение x_2 .



Новый скачок будет также представлять собой движение по гармоническому закону, которое окончится в мгновение, когда скорость тела А снова сравняется со скоростью плоскости В. Соответствующее значение смещения

можно найти по формуле

$$x_3 = 2\alpha - x_2 \quad (18.11)$$

аналогичной соотношению (18.7)

Далее тело A в течение некоторого времени t_4 вновь равномерно движется со скоростью v вместе с плоскостью B , пока при смещении не начнется второй скачок. Для отыскания времени t_4 следует решить такое же по виду уравнение, как и (18.10), т.е.

$$Kx_4 = K(x_3 + vt_4) = F(t_4) \quad (18.12)$$

После окончания второго скачка опять следует равномерное движение, далее произойдет третий скачок и т.д.

Если значения времен совместного движения тела A и плоскости B без скольжения относительно друг друга, т.е. величины t_0, t_2, t_4, \dots стремятся к некоторому пределу t^* , отличному от нуля, то в конце концов установятся периодические колебания тела A с постоянной амплитудой. Эти колебания, заметно отличаются от гармонических и принадлежат к типу релаксационных.

Можно, схему явления обратить и рассматривать случай перемещения конца пружины C с постоянной скоростью v , а плоскость B считать неподвижной (рис.18.4). Анализ явления останется тем же. Тело A этом случае спустя время t_0 после начала растяжения пружины начнет двигаться с последующими остановками продолжительностью t_2, t_4, \dots т.е. прерывисто.

Для определения условий существования прерывистого движения, или скачков, при трении обратимся к прежней механической схеме (рис.18.2) и через x^* обозначим предельное значение ряда величин x_0, x_2, x_4, \dots т.е. смещений тела A от исходного положения, при которых начинается очередной скачок (рис.18.3).

Разность $x^* - \alpha$ представляет собой в пределе половину расстояния, которое тело A проходит без скольжения вместе с плоскостью B . Следовательно,

$$x^* - \alpha = vt^*/2, \quad (18.13)$$

откуда

$$x^* - \alpha = vt^*/2, \quad (18.14)$$

С другой стороны, скачок начинается в мгновение равенства силы упругости пружины C и силы $F(t^*)$ трения трогания с места при продолжительности t^* соприкосновения тела A и плоскости B без скольжения, т.е.

$$Kx^* = F(t^*) \quad (18.15)$$

$$K(\alpha + vt^*/2) = F(t^*) \quad (18.16)$$

Используя выражение (18.14), получаем уравнение для искомого интервала времени t^* . рис.18.5 изображен график изменения силы трения трогания (рис. 18.16) с места $F=F(t)$ в

зависимости от времени t соприкосновения тел без взаимного скольжения. Там же приведена прямая, ординаты которой изображают значения упругой силы пружины к концу времени t пребывания тела А без скольжения на движущейся плоскости В после очередного скачка.

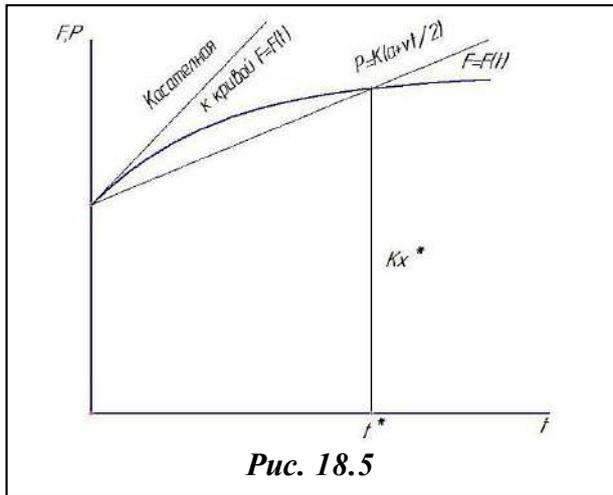


Рис. 18.5

$$P = K\left(\alpha + \frac{vt}{2}\right). \quad (18.17)$$

При значении $t=0$ оба графика имеют общую точку, тогда

$$K\alpha = F_0 = F(0) \quad (18.18)$$

Эта точка будет единственной, если угол между касательной к кривой $F(t)$ и осью абсцисс в точке $t=0$ меньше угла наклона к кривой $F(t)$ абсцисса в точке $t=0$ меньше угла наклона прямой (18.17). В этом случае колебания релаксационного типа отсутствуют. Следовательно, условием отсутствия скачков

при трении является соблюдение неравенства

$$F'(0) < \frac{1}{2}kv \quad (18.19)$$

Пусть сила трения трогания с места изменяется по закону (18.1). Тогда условие (18.19) принимает вид

$$F'(0) = \alpha(F_\infty - F_0) < \frac{1}{2}kv, \quad (18.20)$$

что всегда будет иметь место при достаточно большой жесткости K пружины C или достаточно большой скорости v движения плоскости В. Предельное значение v , при котором неравенство (18.19) обращается в равенство, обозначим через v_1 .

При несоблюдении неравенства (18.20), что может быть, если, например, жесткость пружины мала, графики показанные на рис.18.5, имеют еще точку пересечения, абсцисса которой равна t^* скачки при трении в этом случае непременно возникнут. Можно показать, что скачкообразное движение тела А устойчиво.

Обратимся к графику $F=(t)$ зависимости силы трения трогания с места от продолжительности соприкосновения тел без скольжения и рассмотрим с его помощью процесс установления периодических скачков при трении (рис.18.1).

Воспользуемся для этой цели системой координат этого же графика для изображения изменения силы натяжения P пружины C как функции времени t совместного движения без скольжения тела А и плоскости В. Если откладывать силу натяжения в виде ординаты (рис.18.6), в том же масштабе, что и силу трения трогания с места, то график изменения силы P будет иметь вид прямой

$$P = Q + Kvt, \quad (18.21)$$

где Q -сила натяжения пружины в начале совместного движения тела А и плоскости В без

скольжения друг по другу. Абсцисса точки M пересечения прямой (18.21) и кривой $F=F(t)$ определит мгновение начала первого скачка, а ордината-соответствующее значение смещения x тела A , умноженное на величину жесткости пружины, т.е. на коэффициент K .

Построим точку S , симметричную точке M относительно прямой

$$F = F_0 \quad (18.22)$$

параллельной оси абсцисс: далее отметим на оси ординат точку Q^I , имеющую ту же ординату, что и точка S . Обращаясь к рис.18.3 или формуле (18.17), нетрудно показать что ордината точки Q^I изображает величину силы натяжения пружины к концу и следовательно к началу пового равномерного движения тела. Далее сила натяжения пружины будет изменяться по закону,

$$P = Q^I + Kvt \quad (18.23)$$

которому соответствует на рис.18.6. Прямая $Q^I M^I$, где M^I –точка пересечения прямой (18.23) с кривой $F = F(t)$.

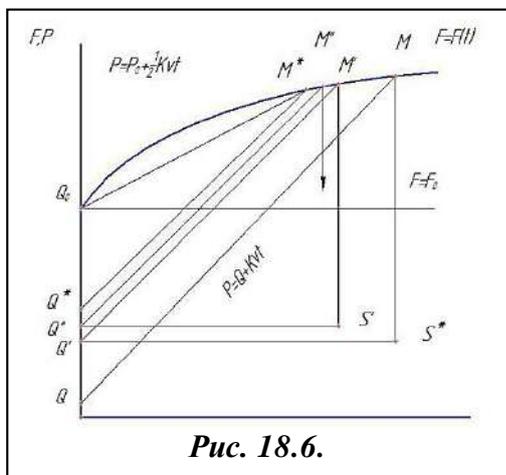


Рис. 18.6.

Точка M^* определяет начало нового скачка. Зная ее расположение, можно построить точки S^I и Q^{II} и продолжать дальнейшие построения, пока последовательность точек M, M^I, M^{II}, \dots не определит предельную точку M^* . Последовательность точек Q, Q^I, Q^{II}, \dots , в свою очередь, определит предельную точку Q^* . Точки M^* и Q^* находятся по разные стороны, но на равных расстояниях от прямой $F=F_0$.

Отметим на оси ординат точку Q_0 , рис. 17.8 удаленную от оси абсцисс на расстояние F_0 . Уравнение прямой $Q_0 M^*$ имеет вид

$$P = F_0 + K \mathcal{G}t / 2, \quad (18.24)$$

в два раза меньше углового коэффициента прямой $Q^* M^*$.

Уравнение прямой (18.24) при учете равенства (18.18) совпадает с уравнением прямой (18.17). Таким образом, абсцисса t^* точки M^* определяется решением уравнения (18.16).

Для исследования вопроса об устойчивости периодического прерывистого движения представим себе, что в некоторое мгновение тело A было положено на плоскость B (рис.18.7) левее того положения, которое соответствует концу скачка при установившемся движении. Этому положению на оси ординат будет соответствовать некоторая точка Q , которая расположена ниже точки Q^* . Сила натяжения пружины будет с течением времени изменяться по закону прямой (18.21) с угловым коэффициентом Kv , пока последняя не пересечет график изменения силы трения трогания с места $F = F(t)$ в некоторой точке M . В то же мгновение начнется скачок.

Ордината точки M больше ординаты точки M^* , и, следовательно, отклонение тела A от положения равновесия $x = a$ при начале данного скачка будет несколько больше, чем при установившемся движении. С другой стороны, ордината точки M меньше ординаты точки N пересечения прямой (18.21) с прямой (18.24), так как точка N расположена выше кривой

графика $F = F(t)$.

Расстояние точки N от прямой $F = F_0$ такое же, как и точки Q , что легко установить, используя теоремы о подобии фигур. Следовательно, точка S , симметричная точке M относительно прямой $F = F_0$, будет ближе расположена к этой прямой, чем точка M . Определим на графике точку Q , которая находится между точками Q и Q^* . Отсюда следует, что скачки будут уменьшаться и в пределе установится периодическое релаксационное движение.

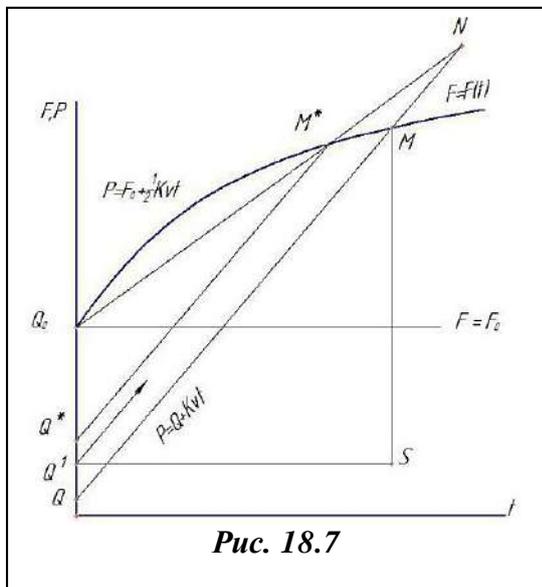


Рис. 18.7

Аналогично если тело A было положено на плоскость B правее того положения, которое соответствует концу скачка при установившемся движении, то скачки будут увеличиваться. На рис. 16.8 этому случаю соответствуют точки $Q_1, M_1, S_1, Q_1^I, \dots$ и т.д.

Абсцисса точки M^* равна продолжительности соприкосновения тела A с плоскостью B между очередными скачками при установившемся движении. В свою очередь, ордината точки M^* представляет собой растяжение пружины в мгновение t^* начала скачка и, следовательно, равна произведению Kx^* , где x^* - соответствующее смещение тела.

Амплитуда установившихся скачков выражается формулой ибо в мгновение начала скачка скорость тела A равна скорости плоскости B .

т.е. величине v , а смещение тела от положения равновесия равно разности $x^* - a$ [16].

$$b = \sqrt{(x^* - a)^2 + \frac{m}{K} g^2}, \quad (18.25)$$

С возрастанием скорости v **движении шероховатой** плоскости угол наклона прямой

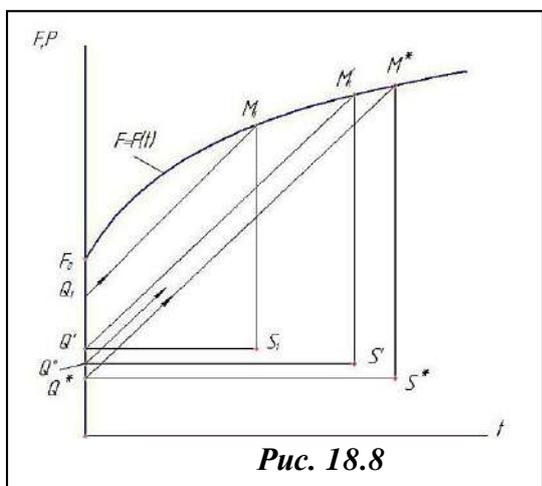


Рис. 18.8

(18.24) к оси абсцисс (рис.18.6) увеличивается и точка M^* становится все ближе к точке Q_0 на оси ординат. При значения $v = v_1$ эти точки сливаются и время t^* обращается в нуль.

Таким образом, точке Q_0 на рис. 18.6 соответствует периодическое гармоническое движение тела A , скользящего по движущейся со скоростью $v = v_1$ плоскости B без остановок, если не считать мгновения, в которые скорости их становятся равными друг другу. Так как при этом разность $x^* - a$ обращается в нуль, то формула (18.25) для амплитуды в таком движении принимает вид

$$b_1 = v_1 \sqrt{\frac{M}{K}}. \quad (18.26)$$

Кроме упомянутого гармонического движения при $v = v_1$, тело A может совершать бесконечное множество других гармонических движений с меньшими амплитудами. В частности, оно может находиться в равновесии при смещении (рис. 18.2) на расстояние $x = a$ вправо от того положения, при котором пружина C не натянута. В последнем случае, согласно соотношению (18.18), сила трения скольжения F_0 и сила натяжения пружины P уравновешивают друг друга, т.е.

$$(18.27) \quad P = K\alpha$$

Отмеченное положение равновесия является устойчивым. Однако дело может обстоять иначе, если сила трения движения хотя бы в малой степени зависит от скорости относительного скольжения тел.

Пусть имеет место так называемая падающая характеристика силы трения. В этом случае упомянутое положение равновесия неустойчиво. В зависимости от жесткости пружины и скорости движения плоскости B в схеме, изображенной на рис. установятся в этом случае периодические скачки.

Падающие характеристики трения встречаются сравнительно редко. Поэтому положение равновесия $x = a$ (при $v > v_1$) т.е. при соблюдении неравенства (18.20) чаще всего будет устойчивым, чему способствует также наличие сопротивления движению тела A со стороны окружающей среды.

При несоблюдении неравенства (18.20) возможны, два стационарных состояния: или покой, или периодическое прерывистое движение. Заметим, с точки зрения теории колебаний **схема**, показанная на рис.18.2 при $\mathcal{G} < \mathcal{G}_1$ представляет собой механическую систему с жестким возбуждением автоколебаний. Из состояния покоя в состояние периодических скачков можно перейти, лишь сообщив телу A скорость, не меньшую значения v скорости движения плоскости B . Таким возбуждением, в частности, является начальное совместное движение без скольжения тела A и плоскости B , приводящее к первому скачку.

Период установившихся движений составляется из времени движения тела совместно с плоскостью и продолжительности скачка. Формула для такого периода имеет вид

$$(18.28) \quad T = 2 \frac{x^* - \alpha}{v} + \pi \sqrt{\frac{m}{K}} + 2\tau,$$

где величина τ находится из соотношения

$$(18.29) \quad \cos \sqrt{\frac{K}{m}} \tau = \frac{x^* - \alpha}{b}$$

В случае предельного значения v , при превышении которого скачки исчезают, т.е. при $v = v_1$, и $x^* = a$ получаем

$$(18.30) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Колебания в этом случае имеют гармонический характер.

При малых значениях v период определяется в основном первым членом формулы (18.28) и колебания имеют релаксационный характер.

Итак:

1. Скачкообразное перемещение трущихся поверхностей (механических релаксационных колебаний) объясняется наличием упругости системы и увеличением силы трения трогания с места при возрастании продолжительности неподвижного контакта.

2. Механические релаксационные колебания возникают лишь в том случае, если постоянная скорость v одной из трущихся поверхностей не превышает некоторого значения v , определяемого равенством $v_1 = 2(F_\infty - F_0) / K$.

3. В интервале скорости от 0 до v_1 указанные колебания будут устойчивыми.

4. Амплитуда и период релаксационных колебаний зависят от скорости v : при уменьшении ее амплитуда скачков возрастает: напротив, при постепенном ее увеличении амплитуда колебаний стремится к некоторому предельному значению, отличному от нуля, а сами колебания приобретают гармонический характер.

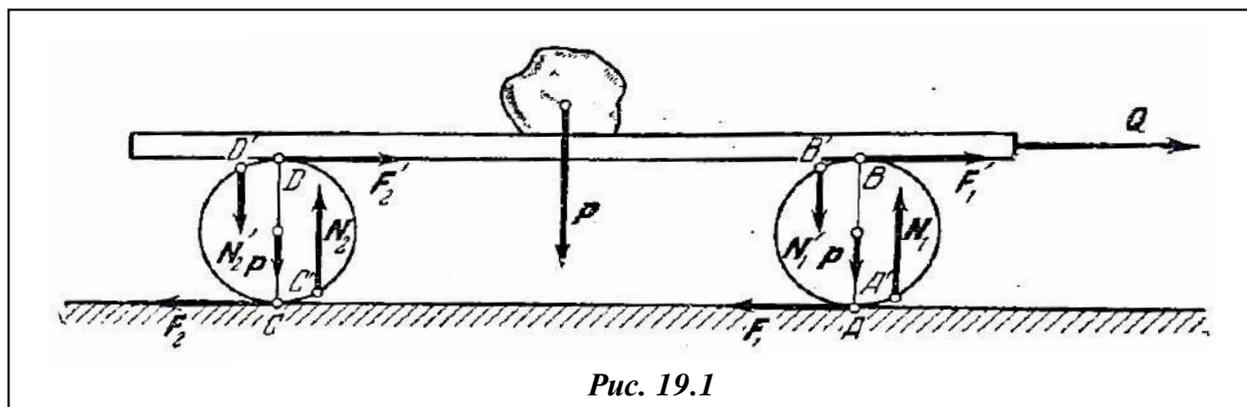
Период колебаний уменьшается при увеличении скорости, однако стремится к некоторому конечному предельному значению, отличному от нуля.

5. Первый скачок обычно больше следующих, поскольку перед скольжением образец лежит, как правило, достаточно длительное время в условии неподвижного контакта.

19. Решение задач при наличии трения качения

Задача 19.1. На двух цилиндрических катках радиуса r и весом p каждый лежит доска, на которой находится груз; вес доски вместе с грузом равен P . К доске приложена горизонтальная сила Q , под действием которой доска вместе с грузом перемещается равномерно (с постоянной скоростью). Определить модуль силы Q , если коэффициент трения качения между катками и грунтом равен f_k а между катками и доской равен f'_k (рис. 19.1).

Решение. Так как по условию задачи система, состоящая из доски и катков, движется равномерно, то все силы, приложенные к доске и каткам, уравновешиваются. К правому катку приложены следующие силы: вес P , силы трения скольжения F_1 и F'_1 , приложенные в точках A и B , нормальная реакция грунта N_1 и нормальная реакция доски N'_1 . Так как между катком и грунтом возникает трение качения, то нормальная реакция N_1 приложена к катку не в точке A , а в точке A' , причем расстояние линии действия этой силы от



точки A равно коэффициенту; трения качения между катками и грунтом, т. е. f_k .

Реакция N'_1 приложена не в точке B , а в точке B' , причем расстояние линии действия этой силы от точки B равно коэффициенту трения качения между катком и доской, т. е. f'_k .

К левому катку приложены силы P , F_2 , F'_2 , N_2 и N'_2 , причем расстояние линии действия силы N_2 , от точки C равно f_k , а расстояние линии действия силы N'_2 , от точки D равно f'_k .

Проектируя все силы, приложенные к правому катку, на вертикаль и составляя сумму моментов этих сил относительно точки A , получим следующие два уравнения равновесия

$$1) \quad N_1 - N'_1 - p = 0, \quad 2) \quad f_k N_1 + f'_k N'_1 - 2rF'_1 = 0.$$

Точно так же, проектируя на вертикаль все силы, приложенные к левому катку, и составляя сумму моментов этих сил относительно точки C , получаем еще два уравнения:

$$3) \quad N_2 - N'_2 - p = 0, \quad 4) \quad f_k N_2 + f'_k N'_2 - 2rF'_2 = 0.$$

Спроектируем, далее, на вертикальное и горизонтальное направления все силы, приложенные к доске; принимая во внимание, что реакции катков, приложенные к доске, по закону равенства действия и противодействия равны по модулю и противоположны по направлению силам F'_1 , N'_1 , F'_2 и N'_2 , получим следующие уравнения:

$$5) \quad N_1 + N_2 = P, \qquad 6) \quad F_1 + F_2 = Q.$$

Сложив теперь уравнения первое и третье, получим:

$$N_1 + N_2 = N'_1 + N'_2 + 2p = P + 2p;$$

сложив, далее, уравнения второе и четвертое, получим:

$$2r(F'_1 + F'_2) = f_k(N_1 + N_2) + f'_k(N'_1 + N'_2) = f_k(P + 2p) + f'_k P,$$

или, принимая во внимание шестое уравнение, получим

$$2rQ = f_k(P + 2p) + f'_k P,$$

откуда находим:

$$Q = \frac{f_k(P + 2p) + f'_k P}{2r}.$$

Если, вес катков мал по сравнению с весом груза, то величиной p можно пренебречь, т. е. можно положить $p = 0$; тогда

$$Q = \frac{f_k + f'_k}{2r} P.$$

Пусть, $P = 1000$ кг, $r = 7,5$ см, $f_k = 0,2$ см и $f'_k = 0,05$ см. Подставляя эти значения получим:

$$Q = \frac{0,2 + 0,05}{15} 1000 = 16 \frac{2}{3} \text{ кг}$$

Коэффициент трения качения зависит не только от материала трущихся тел и их упругих свойств, но также и от радиуса катка и от его нормального давления на опорную плоскость. Поэтому в настоящее время при определении момента пары трения качения пользуются другими точными формулами, учитывающими все эти факторы.

Задача 19.2 На наклонной плоскости находится цилиндр. Найги, при каких углах наклона плоскости к горизонту α цилиндр будет находиться в равновесии, если r — радиус цилиндра, f — коэффициент трения скольжения, δ — коэффициент трения качения (рис. 19.2).

Составим уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -T + P \sin a = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = N - P \cos a = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(F_k) = M_T - rP \sin \alpha = 0.$$

Кроме того, должны выполняться неравенства

$$T \leq fN, \quad M_T \leq \delta N.$$

Из первых трех уравнений можно определить N , T , M_m ; подставив эти величины в последние два неравенства, получим

$$\operatorname{tga} \leq f, \tag{19.1}$$

$$\operatorname{tga} \leq \delta / r. \tag{19.2}$$

Эти неравенства должны удовлетворяться одновременно. В тех случаях, когда $\delta r < f$, потеря равновесия происходит путем перехода к качению, если же $f < \delta / r$, то нарушится неравенство (19.1) и цилиндр начнет скользить.

Задача 19.3 Цилиндрический каток радиуса r и весом Q (рис. 19.2 а) удерживается в равновесии на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, нитью, перекинутой через блок A

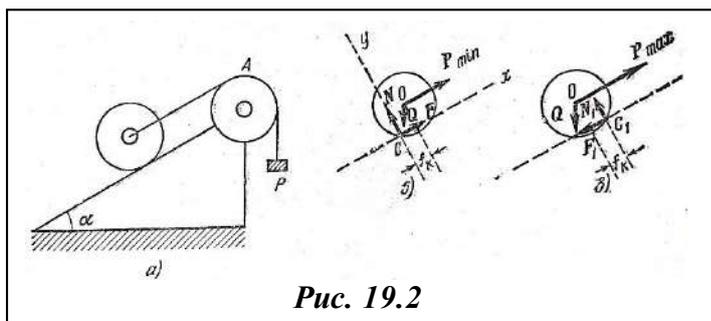


Рис. 19.2

К концу нити подвешен груз весом P . Коэффициент трения качения катка равен f_k .

Определить наименьшую и наибольшую величины веса P , при которых каток будет в равновесии. Найти наименьшее значение коэффициента трения скольжения f , при котором в случае движения каток будет катиться без скольжения.

Решение. Рассмотрим равновесие катка в двух случаях.

В первом случае, когда величина P имеет наименьшее значение, возможное направление движения катка по наклонной плоскости — вниз (рис. 19.2 б). Точка C , где приложена реакция плоскости, в этом случае смещена на расстояние f_k влево от перпендикуляра, опущенного из центра катка O на наклонную плоскость. К катку приложены две активные силы: вес Q и натяжение нити P_{\min} .

Отбрасывая мысленно связь, наложенную на каток, — наклонную плоскость, заменяем ее действие реакцией, которую раскладываем на нормальную составляющую N и касательную составляющую (силу трения F). Составляющая N перпендикулярна к наклонной плоскости, сила трения направлена вдоль наклонной плоскости в сторону, противоположную возможному движению центра катка.

Рассмотрим равновесие катка как равновесие свободного твердого тела, находящегося под действием четырех сил: Q , P_{\min} , N , F . Так как по условию требуется найти только минимальное и максимальное значения силы P при равновесии, то из трех уравнений равновесия составим одно уравнение, выражающее равенство нулю суммы моментов всех сил

относительно точки C :

$$\Sigma m_c(F_k) = -f_k Q \cos a + (Q \sin a - P_{\min})r = 0. \quad (19.3)$$

В это уравнение не вошли неизвестные силы N и F , так как они приложены в точке C .

При составлении уравнения мы разложили силу Q на две составляющие: $Q \cos a$, направленную перпендикулярно к наклонной плоскости (плечо этой составляющей относительно точки C равно коэффициенту трения качения f_k), и составляющую $Q \sin a$, направленную параллельно наклонной плоскости и отстоящую на расстоянии r от нее. Решая уравнение (20.6) относительно P_{\min} , имеем

$$P_{\min} = Q \left[\sin a + \frac{f_k}{r} \cos a \right]. \quad (19.4)$$

Второй случай, когда сила P достигает максимальной величины, при которой возможно равновесие. В этом случае возможное направление движения катка — вверх по наклонной плоскости (рис. 19.2 в). Силы Q и P_{\max} направлены аналогично первому случаю и приложены по-прежнему в центре катка O . Реакция наклонной плоскости приложена в точке C , смещенной на расстояние f_k вправо по наклонной плоскости.

Составляем уравнение моментов относительно точки C :

$$\Sigma m_c(F_k) = f_k Q \cos a - (P_{\max} - Q \sin a)r = 0,$$

откуда имеем

$$P_{\max} = Q \left[\sin a + \frac{f_k}{r} \cos a \right]. \quad (19.5)$$

Таким образом, каток будет находиться в равновесии на наклонной плоскости, если величина силы P лежит в пределах

$$Q \left[\sin a - \frac{f_k}{r} \cos a \right] \leq P \leq Q \left[\sin a + \frac{f_k}{r} \cos a \right].$$

Перейдем к определению наименьшего значения коэффициента трения скольжения f , при котором в случае движения цилиндр будет катиться, а не скользить. Рассмотрим случай, когда вес груза P имеет наименьшую величину.

Приравняем нулю суммы проекций всех сил на ось x , параллельную наклонной плоскости, и на ось y , перпендикулярную к ней (рис. 19.2 б). Подставляя в первое уравнение

$$\Sigma F_{kx} = P_{\min} + F - Q \sin a = 0$$

значение P_{\min} , находим силу трения при качении

$$F = \frac{f_k}{r} Q \cos a.$$

Второе уравнение равновесия

$$\Sigma F_{ky} = N - Q \cos a = 0$$

позволяет определить нормальное давление, равное по величине нормальной реакции

$$N = Q \cos a.$$

Условием, при котором будет **чистое скольжение**, является

$$F < fN, \quad (19.6)$$

где f — коэффициент трения скольжения. Внося в (19.6) значения F и N , находим

$$\frac{f_k}{r} < f. \quad (19.7)$$

Рассмотрим случай, когда вес груза P имеет наибольшую величину (рис. 19.2 в). В этом случае уравнения проекций будут

$$\begin{aligned} \Sigma F_{kx} = P_{\max} - F_1 - Q \sin a = 0, \\ \Sigma F_{ky} = N_1 - Q \cos a = 0. \end{aligned} \quad (19.8)$$

Внося в уравнение (19.8) значение P_{\max} находим

$$F_1 = \frac{f_k}{r} Q \cos a. \quad N = Q \cos a.$$

Подставляя эти значения получаем условие **чистого качения**

$$\frac{f_k}{r} < f$$

Задача 19.4. Стальной цилиндр радиуса r зажат между двумя параллельными направляющими, из которых нижняя закреплена неподвижно, а верхняя может перемещаться прямолинейно, оставаясь параллельной своему первоначальному положению. Верхняя направляющая прижимается вертикальной силой P к диску (рис. 19.3 а). Коэффициенты трения качения между цилиндром, нижней и верхней направляющими соответственно равны f_{k_1} , и f_{k_2}

Пренебрегая весом цилиндра и направляющих, найти максимальную силу T_2 , приложенную к верхней направляющей, при которой цилиндр еще будет оставаться в покое.

Решение. Рассмотрим равновесие цилиндра (рис. 19.3 б), отбросив мысленно нижнюю и верхнюю направляющие, заменив их действие реакциями. Тогда на цилиндр будут действовать со стороны нижней направляющей нормальная реакция N_1 и сила трения T_1 , со стороны верхней направляющей нормальная реакция N_2 и сила трения T_2 .

При этом точка приложения реакции нижней направляющей будет смещена вправо от

вертикального диаметра на расстояние f_{k_1} , а точка приложения реакции верхней направляющей будет смещена на расстояние f_{k_2} , от вертикального диаметра влево, т. е. в сторону возможного перемещения цилиндра по отношению к каждой из направляющих.

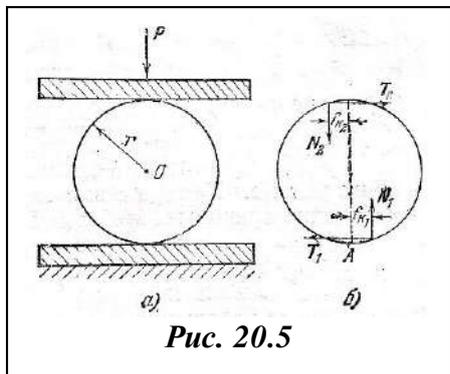


Рис. 20.5

Если рассмотреть равновесие цилиндра вместе с верхней направляющей, то, проектируя силы на вертикаль, получим

$$N_1 - P = 0 \quad \text{или} \quad N_1 = P$$

Тогда, проектируя силы на вертикаль, имеем

$$N_1 - N_2 = 0 \quad \text{или} \quad N_1 = N_2 = P.$$

Составим, сумму моментов всех сил относительно точки A :

$$N_1 f_{k_1} + N_2 f_{k_2} - T_2 \cdot 2r = 0,$$

откуда искомая максимальная сила равна

$$T_2 = \frac{1}{2r} (N_1 f_{k_1} + N_2 f_{k_2}) = \frac{P}{2r} (f_{k_1} + N f_{k_2}).$$

Если коэффициенты трения качения равны

$$f_{k_1} = f_{k_2} = f_k$$

то тогда

$$T_2 = N f_k / r = P f_k / r.$$

Задача 19.4

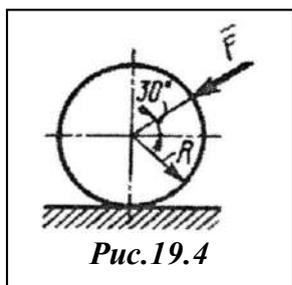


Рис.19.4

2.6.7. Однородный каток 2 весом 4 кН связан с телом I нерастяжимой нитью. Радиус $R = 0,5$ м, коэффициент трения качения $\delta = 0,005$ м, момент пары сил $M = 50$ Н·м. Определить наибольший вес тела I , при котором оно начнет скользить, если коэффициент трения скольжения для катка и тела $f = 0,2$.

Задача 19.5

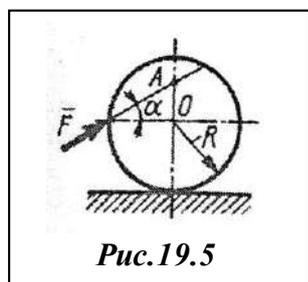
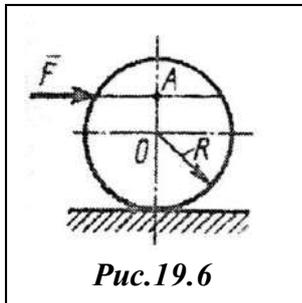


Рис.19.5

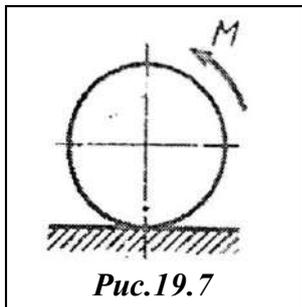
Определить наименьшую силу \vec{F} , необходимую для качения катка радиуса $R = 0,3$ м, если предельный момент трения качения равен $3,46$ Н·м, угол $\alpha = 30^\circ$, расстояние $OA = 0,2$ м.

Задача 19.6



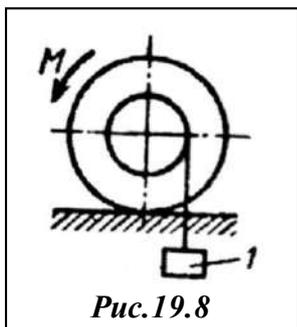
К однородному катка радиуса $R = 0,4$ м приложена горизонтальная сила $F = 12$ Н. Каким должен быть наименьший вес катка в кН, для того чтобы он находился в покое, если коэффициент трения качения $\delta = 0,008$ м, размер $OA = 0,2$ м

Задача 19.7



К однородному катка весом 4 кН приложена пара сил с моментом $M = 20$ Н·м. определить наименьший коэффициент трения качения, при котором каток находится в покое.

Задача 19.8



К однородному катка, малый радиус которого 0,2 м, подвешен груз 1 весом 200 Н и приложена пара сил с моментом $M = 57,6$ Н·м. определить в кН наибольший вес катка, при котором он будет катиться влево, если коэффициента трения качения $\delta = 0,008$ м.

20. Равновесие твердого тела при наличии трения качения. Момент трения качения

Между катком и плоскостью, на которой он покоится, возникают **силы трения**, если приложить к оси катка силу S (рис. 20.1), стремящуюся его двигать по плоскости. Рассмотрим случай, когда сила S параллельна горизонтальной плоскости.

Известно, что при изменении величины силы S от нуля до некоторого предельного значения S_{np} каток остается в покое, т. е. силы, действующие на каток, уравниваются. Кроме активных сил: веса P и силы S , к катку, равновесие которого рассматривается, приложена реакция плоскости. Из условия равновесия трех непараллельных сил следует, что реакция плоскости R должна проходить через центр катка O , так как две другие силы приложены к этой точке.

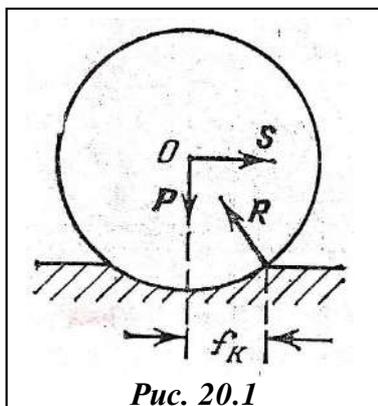


Рис. 20.1

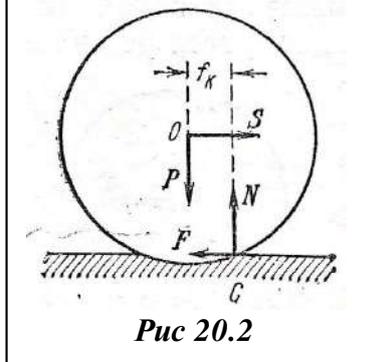


Рис. 20.2

Следовательно, точка приложения реакции C должна быть смещена на некоторое расстояние f_k от вертикали, проходящей через центр колеса, иначе реакция R не будет иметь горизонтальной составляющей, необходимой для удовлетворения условий равновесия.

Разложим реакцию плоскости R на две составляющие: нормальную составляющую N и касательную реакцию F , являющуюся **силой трения** (рис. 20.2).

Таким образом, в предельном положении равновесия катка к нему будут приложены две взаимно уравнивающиеся пары; одна пара сил (S_{np}, F) с моментом $S_{np}r$ (где r — радиус катка), и вторая пара сил (N, P), удерживающая каток в равновесии. Момент второй пары, называемый **моментом трения качения**, определяется формулой

$$m_{\max} = f_k N. \quad (20.1)$$

где f_k — коэффициент трения качения, измеряемый в единицах длины. Этот коэффициент можно рассматривать как расстояние, на которое смещается реакция N от вертикали, проходящей через центр катка. Для того чтобы имело место чистое качение (без скольжения), необходимо, чтобы сила трения F была

меньше по величине, чем максимальная сила трения скольжен

$$F < fN, \quad (20.2)$$

где f — коэффициент трения скольжения.

Трение качения возникает из-за деформации катка и плоскости, вследствие чего соприкосновение между катком и плоскостью происходит по некоторой поверхности, смещенной от нижней точки катка в сторону возможного движения.

При решении задач на равновесие твердого тела при наличии трения качения

1) следует реакцию шероховатой поверхности направить из точки, отстоящей на расстоянии коэффициента трения качения f_k от нормали, проведенной из центра катка так, чтобы она проходила через точку O пересечения двух других сил, действующих на каток (рис. 20.2), или заменить реакцию R двумя составляющими — нормальной реакцией N и силой трения F ;

- 2) сопоставить число неизвестных и число уравнений равновесия, добавив к ним зависимость момента трения от нормального давления; число неизвестных должно быть равно числу уравнений, если задача является статически определенной;
- 2) составить систему уравнений равновесия для твердого тела;
- 3) решив полученную систему уравнений, определить искомые величины;
- 4) сопоставив величину силы трения с максимальной силой трения скольжения, убедиться в том, что первая сила меньше второй.

Задача 20.1 Цилиндрический каток диаметра 60 см и весом $Q = 3,92$ кН приводится в равномерное движение человеком, который давит на рукоятку $AO = 1,5$ м с постоянной силой P в направлении AO . Высота точки A над горизонтальной дорогой 1,2 м. Коэффициент трения качения катка равен $f = 0,5$ см.

Определить величину силы P , силу трения при качении и нормальную составляющую реакции горизонтальной плоскости (рис. 20.3 а). Коэффициент трения скольжения между катком и дорогой $f = 0,2$.

Решение. При равномерном качении катка все силы, действующие на каток, уравновешиваются. К катку приложены две активные силы: вес катка Q и сила давления человека P . На каток, наложена одна связь — горизонтальная плоскость. Применяв закон освобождения от связей, отбросим мысленно горизонтальную плоскость и заменим ее действие реакцией R . Эта реакция приложена в точке C , находящейся на расстоянии f_k от вертикали, проведенной через центр колеса. Реакция R направлена по прямой CO , так как согласно теореме о трех непараллельных силах в случае равновесия линии их действия пересекаются в одной точке O (рис. 20.3 б). Реакцию плоскости R раскладываем на две составляющие: нормальную составляющую N , перпендикулярную плоскости, и касательную составляющую силу трения при качении F , направленную вдоль плоскости.

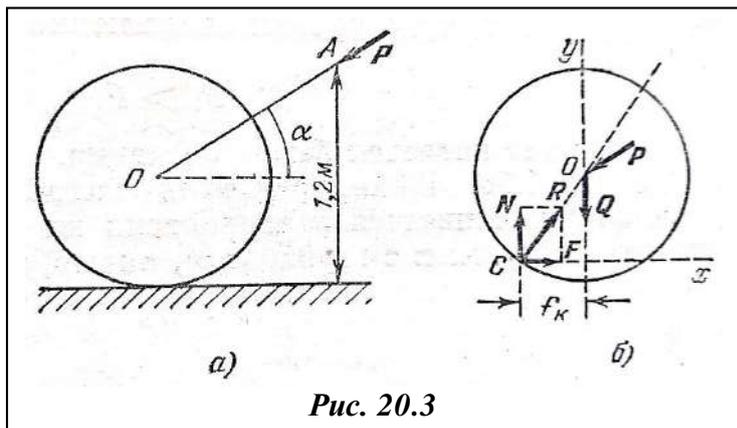


Рис. 20.3

Рассмотрим равновесие катка как твердого тела, находящегося под действием четырех сил: Q, P, N, F .

Выберем систему декартовых координат. Ось x направим по горизонтальной плоскости вправо, ось y — вертикально вверх через центр катка. Составим уравнения равновесия. Обозначив буквой λ угол между горизонталью (осью x) и рукояткой OA , получим

$$\sum F_{kx} = F - P \cos a = 0, \quad (20.3)$$

$$\sum F_{ky} = N - Q - P \sin a = 0, \quad (20.4)$$

$$\sum m_c(F_k) = P \cos a \cdot r - (Q + P \sin a) f_k = 0. \quad (20.5)$$

В уравнении (20.5) буквой r обозначен радиус катка.

При составлении суммы моментов сил относительно точки C сила P , приложенная в центре катка O , разложена на две составляющие — горизонтальную ($P \cos \alpha$) и вертикальную ($P \sin \alpha$), и использована теорема Вариньона. При этом, при вычислении момента горизонтальной составляющей силы P пренебрегли изменением ее плеча, считая, что оно равно радиусу катка r .

Из уравнения (20.5) найдем величину искомой силы P :

$$P = \frac{Qf_k}{r \cos a - f_k \sin a} = \frac{3,92 \cdot 0,5}{30 \frac{1,2}{1,5} - 0,5 \frac{0,9}{1,5}} = 0,0827 \text{ кН}$$

Равенство (20.4) даст

$$N = Q + P \sin a = 3,92 + 0,0827 \frac{0,9}{1,5} = 3,9695 \text{ кН}$$

Определим величину силы трения:

$$F = P \cos a = 0,0827 \frac{1,2}{1,5} = 0,0663 \text{ кН}$$

Проверим, сопоставляя величины силы трения при качении F и силы трения скольжения, будет ли в данном случае чистое качение или же будет иметь место скольжение. Сила трения скольжения равна

$$F_1 = fN = 0,2 \cdot 3,9695 = 0,794 \text{ кН}$$

Таким образом, сила трения скольжения больше силы трения при качении $F_1 > F$ и каток будет катиться без скольжения.

21. Решение задач при наличии трения скольжения

Задача 21.1. Шкив радиуса r насажен на вал радиуса a , который может вращаться в подшипниках. Коэффициент трения между валом и подшипниками f .

Определить наибольшую величину силы P , которая удержит шкив в покое, если к шкиву приложена сила Q , образующая с силой P угол α (рис. 21.1). Найти значение силы P , когда $\alpha = \pi/2$ и когда силы P и Q параллельны.

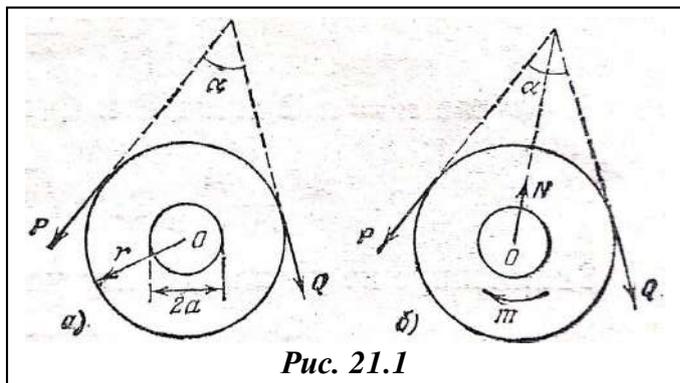


Рис. 21.1

Решение. Отбросив мысленно подшипники, рассмотрим равновесие вала вместе со шкивом, заменив действие подшипников нормальной реакцией N и моментом сил трения m . Момент сил трения (относительно точки O) может быть представлен в виде

$$m = fN \cdot \alpha.$$

(21.1)

Момент сил трения будет направлен в сторону, противоположную возможному движению. Таким образом, этот момент будет совпадать по направлению с моментом меньшей силы.

Положив $Q < P$, составим уравнение равновесия вала со шкивом, приравняв нулю сумму моментов всех сил относительно центра O :

$$P \cdot r - Q \cdot r - fN \cdot \alpha = 0. \quad (21.2)$$

С другой стороны, нормальная реакция N определится по величине как равнодействующая двух сил P и Q

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}. \quad (21.3)$$

Подставив это значение в уравнение (21.2), получим

$$\left(1 - \frac{f^2 \alpha^2}{r^2}\right) P^2 - \left(2Q + 2Q \cos \alpha \frac{f^2 \alpha^2}{r^2}\right) P + Q^2 \left(1 - \frac{f^2 \alpha^2}{r^2}\right) = 0. \quad (21.4)$$

Величина P равна большому корню этого квадратного уравнения.

Меньший корень P будет соответствовать случаю $Q > P$. В случае, когда P и Q параллельны, решение упрощается. Действительно, при этом

$$N = P + Q \quad (21.5)$$

и, следовательно, из (21.2) после преобразований находим

$$P = Q \frac{r + f\alpha}{r - f\alpha}. \quad (21.6)$$

В случае $\alpha = \pi/2$ силы P и Q взаимно перпендикулярны, и из (21.4) получим

$$P = Q \left[\frac{r^2}{r^2 - f^2 \alpha^2} \pm \sqrt{\left(\frac{r^2}{r^2 - f^2 \alpha^2} \right)^2 - 1} \right] \quad (21.7)$$

Знак минус не удовлетворяет условию задачи, так как при этом

$$\frac{r^2}{r^2 - f^2 \alpha^2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{r^2 - f^2 \alpha^2} \right)^2 - 1} < 1 \quad (21.8)$$

и, следовательно, $P < Q$, что противоречит условию. Неравенство (21.8) вытекает из того, что функция

$$\varphi(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

при $x = 1$ принимает значение $\varphi(1) = 1$ и при $x > 1$ монотонно убывает. Действительно,

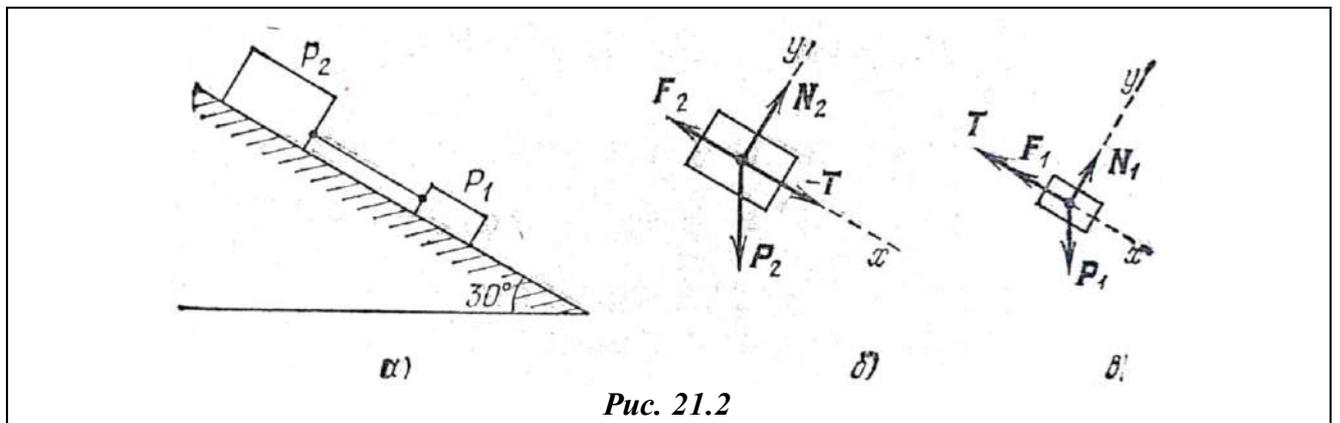
$$\varphi(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} < 0 \quad \text{при } x > 1,$$

а в рассматриваемом случае

$$x = \frac{r^2}{r^2 - f^2 \alpha^2} > 1.$$

Знак минус в равенстве (21.7) соответствует, случаю $Q > P$, когда момент трения будет совпадать по направлению с моментом силы P .

Задача 21.2 На наклонной плоскости, образующей угол 30° с горизонтом, лежат два прямоугольных груза весом $P_1 = 4 \text{ кН}$ и $P_2 = 6 \text{ кН}$, соединенные тросом (рис. 21.2). Коэффициенты трения грузов о наклонную плоскость соответственно равны: $f_1 = 0,4$, $f_2 = 0,8$. Определить натяжение троса T и модули сил трения, действующих на грузы, F_1 и F_2 . Будут ли грузы в покое или в движении?



Решение. Рассмотрим равновесие первого груза, отбросив мысленно связи — наклонную плоскость и трос (рис. 21.2). На груз действуют вес P_1 , нормальная реакция N_1 ,

сила трения F_1 и натяжения троса T .

Проектируя силы на оси координат и приравнявая суммы проекций нулю, имеем

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = P_1 \sin 30^\circ - T - F_1 = 0. \quad (21.9)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = N_1 - P_1 \cos 30^\circ = 0.$$

К этим уравнениям добавим зависимость силы трения от нормального давления

$$F_1 = f_1 N_1 = f_1 P_1 \cos 30^\circ. \quad (21.10)$$

Решая совместно эту систему уравнений, находим

$$T = P_1 \sin 30^\circ - F_1 = P_1 \sin 30^\circ - f_1 P_1 \cos 30^\circ = 0.616 \text{ кН}. \quad (21.11)$$

Следовательно, если бы трос отсутствовал, то первый груз начал бы двигаться вниз по наклонной плоскости. Для того чтобы ответить на вопрос, будут ли двигаться оба груза, необходимо рассмотреть равновесие второго груза (рис. 21.2).

К грузу приложены: вес P_2 , натяжение троса T , равное по модулю (21.11), нормальная реакция N_2 и сила трения F_2 .

Проектируя эту систему сходящихся сил на оси координат, находим

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = P_2 \sin 30^\circ + T - F_2 = 0, \quad (21.12)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = N_2 - P_2 \cos 30^\circ = 0.$$

Из первого уравнения системы (21.12) находим модуль сил трения:

$$F_2 = P_2 \sin 30^\circ + T = 6 \cdot 0,5 + 0.616 = 3,616 \text{ кН}.$$

Если найденное значение силы трения меньше ее максимальной величины, то оба груза будут в покое. В противном случае они начнут двигаться.

Максимальное значение силы трения найдем из второго уравнения системы (21.20). Имеем

$$N_2 = P_2 \cos 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

и максимальное значение силы трения равно

$$F_{2\max} = f_2 N_2 = 0,8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4,152 \text{ кН.}$$

Так как модуль силы трения, вычисленный исходя из соответствующего уравнения равновесия, меньше ее максимального значения, то система будет находиться в покое. Сила трения, действующая на первый груз, равна ее максимальному возможному значению.

Задача 21.3 Три груза весом P_1, P_2, P_3 , соединенные тросами, лежат на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 21.3). Коэффициенты трения грузов о плоскость соответственно равны f_1, f_2, f_3 . Определить силу, параллельную наклонной плоскости, при действии которой тела будут равномерно двигаться вверх по плоскости. Найти усилия в тросах T_{12}, T_{23} .

Решение. Рассмотрим равновесие трех грузов, так как при равномерном

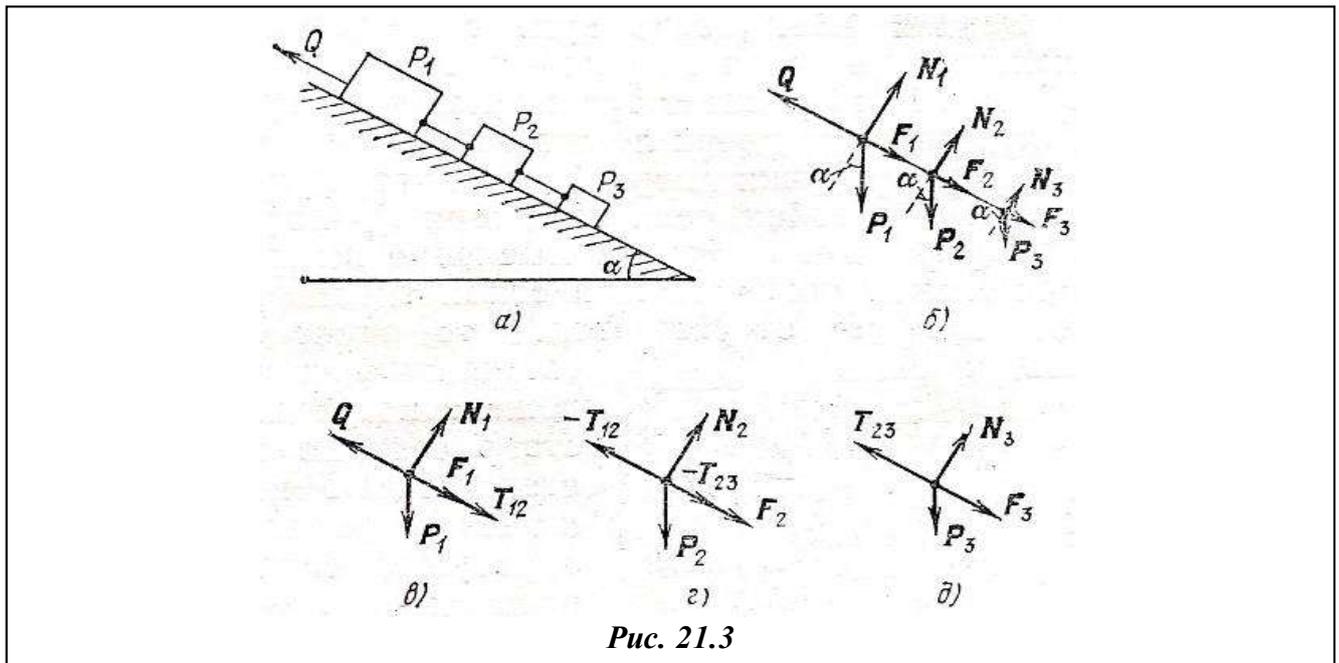


Рис. 21.3

прямолинейном движении, как и при покое, силы, действующие на систему тел, должны быть в равновесии.

Применяя принцип освобождения от связей, отбросим мысленно наклонную плоскость, заменив ее действие реакциями (рис. 21.3). Тогда к системе трех грузов будут приложены активные силы P_1, P_2, P_3 , и Q , нормальные реакции N_1, N_2, N_3 и силы трения F_1, F_2, F_3 .

Уравнения равновесия в проекциях на направление наклонной плоскости и на направление, перпендикулярное к ней, будут

$$Q - F_1 - P_1 \sin \alpha - F_2 - P_2 \sin \alpha - F_3 - P_3 \sin \alpha = 0, \quad (21.13)$$

$$N_1 + N_2 + N_3 - P_1 \cos \alpha - P_2 \cos \alpha - P_3 \cos \alpha = 0. \quad (21.14)$$

Рассмотрим далее равновесие каждого груза в отдельности, разрезав мысленно трос и заменив его действие реакцией. Составляя уравнения проекций на те же оси для каждого

груза, имеем (рис. 21.3 в, з, д)

$$Q - F_1 - T_{12} - P_1 \sin \alpha = 0, \quad (21.5)$$

$$N_1 - P_1 \cos \alpha = 0, \quad (21.6)$$

$$T_{12} - F_2 - T_{12} - P_2 \sin \alpha = 0, \quad (21.7)$$

$$N_2 - P_2 \cos \alpha = 0, \quad (21.8)$$

$$T_{23} - F_3 - P_3 \sin \alpha = 0, \quad (21.9)$$

$$N_3 - P_3 \cos \alpha = 0, \quad (21.10)$$

Кроме того, запишем зависимости сил трения от нормального давления с учетом (21.6), (21.8) и (21.10):

$$F_1 = f_1 N_1 = f_1 P_1 \cos \alpha, \quad (21.11)$$

$$F_2 = f_2 N_2 = f_2 P_2 \cos \alpha, \quad (21.12)$$

$$F_3 = f_3 N_3 = f_3 P_3 \cos \alpha, \quad (21.13)$$

Тогда из (21.13) находим

$$Q = (P_1 + P_2 + P_3) \sin \alpha + (f_1 P_1 + f_2 P_2 + f_3 P_3) \cos \alpha.$$

Из (21.5) определяем натяжение:

$$T_{12} = (P_2 + P_3) \sin \alpha + (f_2 P_2 + f_3 P_3) \cos \alpha.$$

Из (21.9) находим натяжение:

$$T_{23} = P_3 \sin \alpha + f_3 P_3 \cos \alpha.$$

Задача 21.4. Дверь купе в железнодорожном вагоне может скользить в горизонтальных желобах, расположенных сверху и снизу. **Коэффициент трения** между дверью и нижним желобом f . Центр тяжести двери лежит на оси симметрии. Найти максимальную высоту ручки двери l , при которой дверь не будет перекашиваться в желобах, если вес двери Q , ширина двери a (рис. 21.4.).

Решение. Отбросим мысленно желоба, заменим их действие нормальной реакцией N и силой трения F . Если бы горизонтальная сила P отсутствовала, то равнодействующая нормальных составляющих реакции N была бы приложена посередине двери и ее линия действия совпала бы с силой Q . При действии силы P возникает момент, стремящийся опрокинуть дверь. Этот момент образуется силами P и F . Для уравнивания этого момента реакция N сдвигается вправо. Причем чем выше прикладывается сила P , тем больше становится опрокидывающий момент и тем дальше вправо сдвигается точка приложения реакции N . Крайней точкой является точка A . Если и далее увеличивать высоту приложения силы P , то для уравнивания сил дверь перекосится и возникнет реакция в

левом верхнем углу двери, направленная вниз.

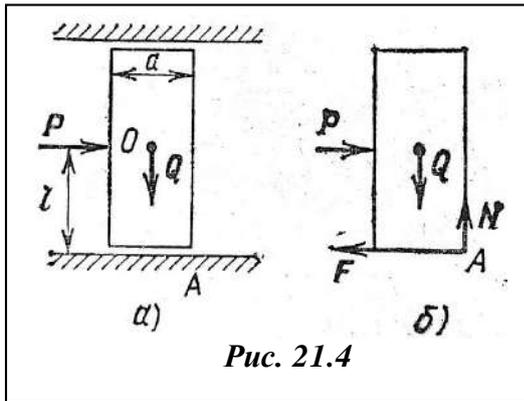


Рис. 21.4

Рассмотрим предельное положение равновесия (рис. 21.4 б), когда нормальная реакция приложена к точке А. К двери приложены активные силы Q и P , нормальная реакция N и сила трения F . Составляем уравнения равновесия двери:

$$\Sigma F_{kx} = P - F = 0, \quad (21.14)$$

$$\Sigma F_{ky} = N - Q = 0, \quad (21.15)$$

$$\Sigma_{m_A}(F_k) = -Pl + Q\frac{a}{2} = 0. \quad (21.16)$$

Запишем зависимость между силой трения и нормальным давлением:

$$F = fN. \quad (21.17)$$

Из уравнений (21.14), (21.15) и (21.17) находим

$$P = fQ.$$

Внеся то значение в уравнение (21.16), имеем откуда

$$Q\frac{a}{2} = P \cdot l = fQl.$$

Если высота $l \leq a/(2f)$, то дверь не будет перекашиваться. Если же $l > \frac{a}{2f}$, то перекося не минуем.

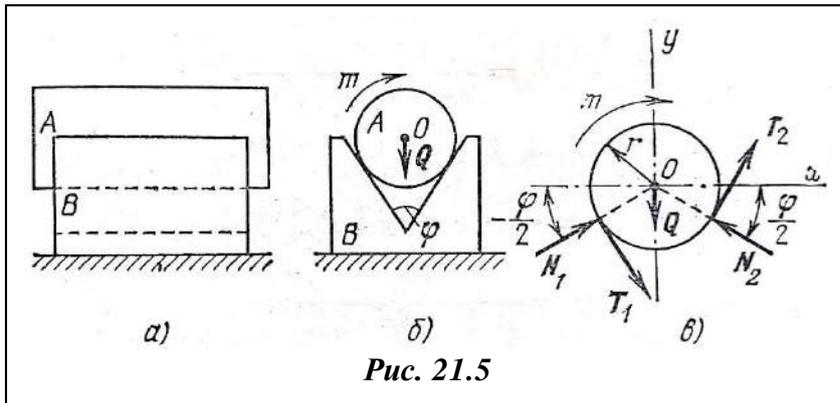


Рис. 21.5

Задача 21.5 Цилиндр A весом Q и радиуса r лежит в горизонтальных направляющих B , образующих угол φ (рис. 21.5 а, б).

Коэффициент трения скольжения между цилиндром и направляющими равен f . Определить максимальное значение момента m , при котором цилиндр еще не начнет вращаться в

направляющих. Найти при этом реакции направляющих.

Решение. Рассмотрим равновесие цилиндра, отбросив мысленно направляющие и заменив их действие реакциями (рис. 21.5б). К цилиндру приложены активные: сила Q , момент m , а также нормальные реакции N_1 и N_2 и силы трения T_1 и T_2 . Силы трения направлены по касательным к цилиндру в сторону, противоположную возможному движению. Углы, образованные нормальными реакциями с осью x , равны $\varphi/2$, углы между силами трения и осью y также равны $\varphi/2$.

Составляем уравнения равновесия, приравняв нулю суммы проекций всех сил на оси x и y :

$$\Sigma F_{kx} = N_1 \cos(\varphi / 2) - N_2 \cos(\varphi / 2) + T_1 \sin(\varphi / 2) + T_2 \sin(\varphi / 2) = 0, \quad (21.18)$$

$$\Sigma F_{ky} = N_1 \sin(\varphi / 2) - N_2 \sin(\varphi / 2) + T_1 \cos(\varphi / 2) + T_2 \cos(\varphi / 2) - Q = 0. \quad (21.19)$$

Третье уравнение равновесия получим, приравняв нулю сумму моментов сил относительно центра цилиндра O :

$$\Sigma_{m_o} (F_k) = T_1 r + T_2 r - m = 0. \quad (21.20)$$

В этих трех уравнениях пять неизвестных: m , N_1 и N_2 , T_1 и T_2 . Запишем соотношения между нормальными реакциями и силами трения:

$$T_1 = fN_1, \quad T_2 = fN_2. \quad (21.21)$$

Для определения неизвестных подставим значения сил трения (21.21) в уравнения (21.18) и (21.19):

$$(N_1 - N_2) \cos(\varphi / 2) + f(N_1 + N_2) \sin(\varphi / 2) = 0, \quad (21.22)$$

$$-f(N_1 - N_2) \cos(\varphi / 2) + (N_1 + N_2) \sin(\varphi / 2) = Q.$$

Умножим первое уравнение системы (21.22) на f и сложим со вторым уравнением этой системы. Найдем

$$N_1 + N_2 = \frac{Q}{(1 + f^2) \sin(\varphi / 2)}. \quad (21.23)$$

Подставляя это значение в уравнение моментов (21.20), с учетом равенств (21.21) находим

$$m = rf(N_1 + N_2), \quad (21.24)$$

или, окончательно,

$$m = \frac{Q}{(1 + f^2) \sin(\varphi / 2)}. \quad (21.25)$$

Это максимальное значение момента, при котором цилиндр еще будет оставаться в покое или же будет равномерно вращаться.

Переходим к определению реакций. Внеся в уравнение (21.18) вместо суммы нормальных

реакций (21.23), получим

$$\frac{Q}{1+f^2} - T_1 \cos(\varphi/2) + T_2 \cos(\varphi/2) - Q = 0. \quad (21.26)$$

Подставляя в уравнение значение момента находим

$$T_1 + T_2 = \frac{fQ}{(1+f^2)\sin(\varphi/2)}. \quad (21.27)$$

Умножая уравнение (21.27) на $\cos(\varphi/2)$ и складывая с уравнением (21.26), имеем

$$T_2 = \frac{fQ}{2(1+f^2)\sin(\varphi/2)} + \frac{1}{2\cos(\varphi/2)} \left(Q - \frac{Q}{1+f^2} \right). \quad (21.28)$$

Подставляя это значение в равенство (21.27), находим

$$T_1 = \frac{fQ}{2(1+f^2)\sin(\varphi/2)} - \frac{1}{2\cos(\varphi/2)} \left(Q - \frac{Q}{1+f^2} \right).$$

Соответственно нормальные реакции определяются из равенств (21.29):

$$N_2 = \frac{Q}{2(1+f^2)\sin(\varphi/2)} + \frac{1}{2f\cos(\varphi/2)} \left(Q - \frac{Q}{1+f^2} \right),$$

$$N_1 = \frac{Q}{2(1+f^2)\sin(\varphi/2)} - \frac{1}{2f\cos(\varphi/2)} \left(Q - \frac{Q}{1+f^2} \right).$$

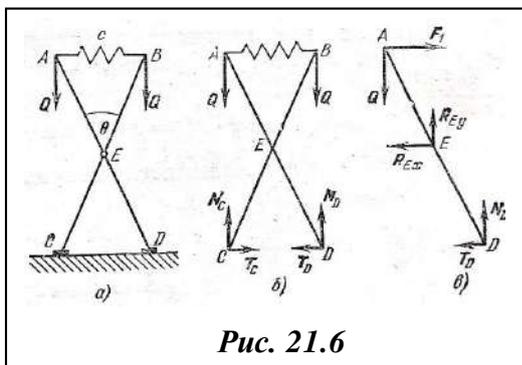


Рис. 21.6

Задача 21.16. Два невесомых стержня AD и BC соединены шарнирно в средней точке E . Нижние концы стержней могут скользить по шероховатой горизонтальной поверхности (**коэффициент трения f**). Верхние концы стержней соединены пружиной жесткости C и нагружены вертикальными силами Q .

Длина каждого стержня, длина недеформированной пружины. Найти, какой угол θ составляют между собой стержни в положении равновесия.

Решение. Рассмотрим вначале равновесие всей системы в целом, освободив ее от опоры на шероховатую плоскость и заменив ее действие силами: нормальными составляющими реакций N_c и N_d касательными составляющими реакций T_c и T_D (рис. 21.6 б). Касательные составляющие реакций будем считать равными их предельным значениям:

$$T_c = fN_c \quad T_D = fN_D$$

Составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \quad fN_c - fN_D = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = 0, \quad N_c + N_D - 2Q = 0,$$

$$\Sigma m_c(F_k) = 0, \quad -Q \cdot b \sin \frac{\theta}{2} + N_D \cdot b \sin \frac{\theta}{2} = 0.$$

Получаем из этих уравнений

$$N_c + N_D = Q.$$

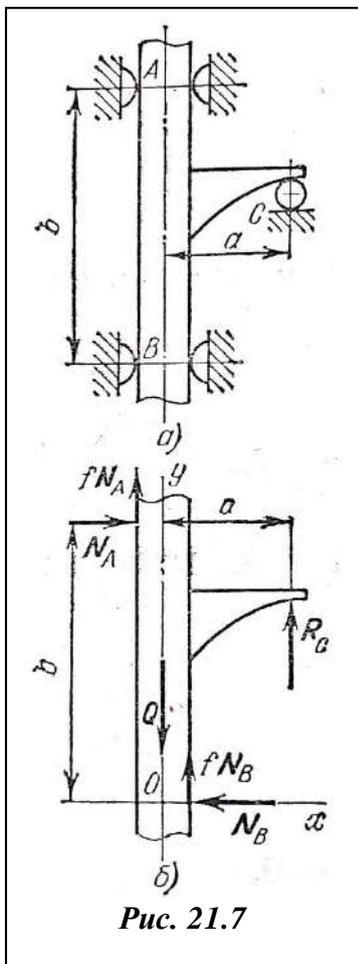


Рис. 21.7

Далее, расчленим систему и рассмотрим равновесие одного из стержней, например AD (рис. 21.6 в). К стержню AD приложены следующие силы: в точке A — сила упругости пружины F_1 и заданная вертикальная нагрузка Q ; в точке D — известные реакции $N_D = Q$ и $T_D = fN_D = fQ$, в точке E — реакция, заменяющая действие отброшенного стержня BC . Эта реакция может быть разложена на две неизвестные составляющих R_{EX} и R_{EY} — Поскольку нас интересует только одна неизвестная величина — угол θ между стержнями, а реакцию в точке E определять не требуется, ограничимся составлением только одного уравнения равновесия для стержня AD , а именно уравнения моментов относительно точки E :

$$\Sigma m_E(F_k) = 0,$$

$$Q \cdot b \sin \frac{\theta}{2} + F_1 \cdot b \cos \frac{\theta}{2} + N_D \cdot b \sin \frac{\theta}{2} - T_D \cdot b \cos \frac{\theta}{2} = 0.$$

Подставляя в это уравнение значения N_D и T_D , а также силу упругости, согласно закона Гука

Задача 21.7. Вертикальная мачта весом Q поддерживается кронштейном, опирающимся на ролик C . Коэффициент трения в направляющих A и B одинаков и равен f . Размеры указаны на рис. а. Определить реакции опор A , B и C . (рис.21.7)

$$F_1 = c \cdot \Delta b = c \left(2b \sin \frac{\theta}{2} - b \right) = cb \left(2 \sin \frac{\theta}{2} - 1 \right),$$

получаем, после сокращения

$$Q \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} - cb \left(2 \sin \frac{\theta}{2} - 1 \right) \cos \frac{\theta}{2} - fQ \cos \frac{\theta}{2} = 0$$

Или

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{f}{2} = \frac{cb}{2Q} \left(2 \sin \frac{\theta}{2} - 1 \right).$$

При заданных значениях Q , f , b и c это уравнение может быть решено графически.

Решение. Освобождаем мысленно мачту от опор и заменяем их действие реакциями, как показано на расчетной схеме (рис. 21.7 б).

Направление реакций N_A и N_B выбрано из соображений возможного перекоса мачты под действием реакции R_c .

Моменты сил N_A и N_B должны противодействовать моменту силы R_c . Направление сил трения определяется направлением возможного проскальзывания тяжелой мачты вниз. Максимальные величины сил трения

$$F_A = fN_A, \quad F_B = fN_B,$$

Записываем три уравнения равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\Sigma F_{ix} = 0, \quad N_A - N_B = 0, \quad (21.29)$$

$$\Sigma F_{iy} = 0, \quad fN_A - fN_B + R_c - Q = 0, \quad (21.30)$$

$$\Sigma m_{i(0)} = 0, \quad -N_A \cdot b - fN_A \cdot r + fN_B \cdot r + R_c \cdot a = 0. \quad (21.31)$$

В уравнении моментов содержится неизвестный радиус мачты r . Из уравнения (4.12) получаем равенство нормальных реакций

$$N_A = N_B,$$

а значит, и сил трения

$$fN_A = fN_B.$$

Тогда уравнения (21.30) и (21.31) примут вид

$$2fN_A + R_c - Q = 0, \quad -N_A \cdot b + R_c \cdot a = 0.$$

Решая эту систему, получаем

$$N_A = N_B = \frac{Qa}{2a+b}, \quad R_c = \frac{Qb}{2fa+b}.$$

22. Трение и сопротивление почвы

а) трение почвы о поверхность рабочих органов машин, внутреннее трения

Данное трение почвы является причиной износа рабочих органов машин. Коэффициент трения почвы о сталь зависит главным образом от механического состава и влажности почвы. В зависимости от механического состава (типа) почвы **коэффициент трения** почвы о сталь, по данным проф. Г.Н. Синокова [29] принимает следующие значения: песчаные и супесчаные сыпучие – 0,25 – 0,35; песчаные и супесчаные связные – 0,50 – 0,70; легко – и среднеуглинистые – 0,35 – 0,50; тяжёлые суглинки и глины – 0,60 – 0,90. Большие значения **коэффициента трения** для почв всех типов, за исключением связных песчаных и супесчаных, соответствуют высокой влажности, меньшие – низкой.

Влажность почвы оказывают большое влияние на величину **коэффициента трения** о сталь. По данным М.Л. Никольса [29], при низкой влажности почвенная влага не прилипает к металлу – происходит настоящее трение и **коэффициент f** не зависит от содержания влаги в почве (рис. 22.1 отрезок аб). Дальнейший рост влажности почвы вызывает увеличение коэффициента трения (отрезок бв), которое объясняют возрастанием сил молекулярного притяжения почвенных частиц к поверхности металла (прилипание почвы к металлу). Если содержание влаги достаточно, чтобы обеспечить непрерывный её приток к поверхности почвы с металлом, то она играет роль смазки и **коэффициент трения** с увеличением влажности почвы уменьшается [(отрезок вг), рисунок – 22.1].

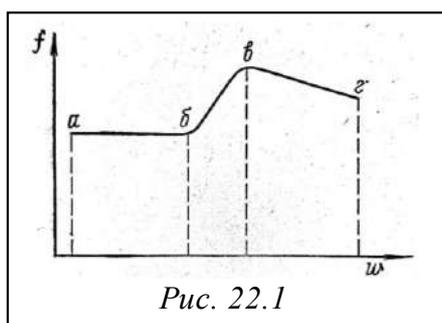


Рис. 22.1

Трение проявляется как сопротивление скольжению одного тела относительно другого, с ним соприкасающегося (внешнее трение), или одних частиц одного и того же тела относительно других (**внутреннее трение**). Как и всякая сила реакции, сила трения может изменяться с колебаниями активной силой от нуля до максимума. Предельно максимальная сила трения бывает при скольжении.

Коэффициент внутреннего трения (почвы о почву) в большинстве случаев больше коэффициентов трения почвы о металл. Вследствие этого рабочие органы почвообрабатывающих машин редко заменяют почвой.

Трению обычно сопутствует процесс прилипания. Однако, как указывает акад. В.Л. Желиговский [29], законы трения и прилипания различны. Сила трения не зависит от величины трущихся поверхностей, а сила прилипания прямо пропорциональна площади контакта.

б) сопротивление почвы действию клина

При деформировании клином почва оказывает сопротивление в виде нормальной силы N и силы трения $Ntg\varphi$ (рис. 22.2).

Нормальная сила в **первой фазе** деформирования определяется в основном сопротивлением почвы смятию. При этом вес частиц, поднимаемых клином, не имеет

большого значения, так как пласт до разрушения большей своей частью опирается на впереди лежащую почву.

Во **второй фазе** деформирования нормальная сила определяется составляющей веса образовавшейся глыбы. Сопротивлению почвы смятию зависит от коэффициента объёмного смятия и величины деформации. Сила трения определяется нормальной силой N и

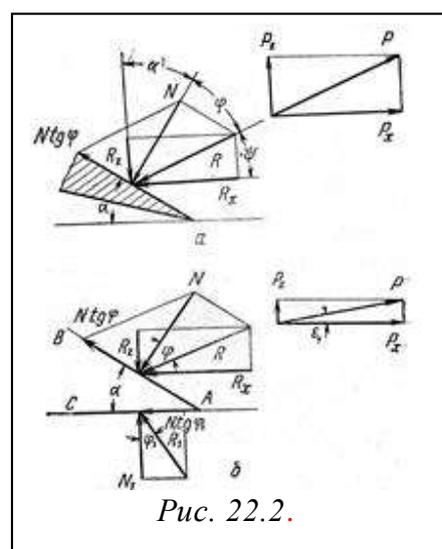


Рис. 22.2.

коэффициентом трения $tg\varphi$, который зависит от состояния рабочей грани клина и свойств почвы.

Из рисунка 22.2 видно, что равнодействующая R нормальной силы N и силы трения $Ntg\varphi$ отклонена от нормали к поверхности клина на угол φ трения.

Разложим силу R на две составляющие (R_x и R_y). R_x определяет сопротивление клина перемещению, R_y характеризует заглубляющую способность клина и уравнивается вертикальной составляющей тягового усилия, а также опорными устройствами орудия (колесами, пяткой полевой доски и пр.).

Можно характеризовать заглубляемость клина и величиной угла ψ между результирующей R и осью Ox .

Угол ψ у простого клина с одной рабочей гранью может быть определён по значениям углов трения и крошения α . Из рисунка 22.2 а имеем

$$\psi = 90 - (\alpha + \varphi) \quad (22.1)$$

Следовательно при $\varphi = const$ увеличение угла α вызывает уменьшение ψ , т.е. заглубляемость клина ухудшается. Таким образом, для лучшей заглубляемости необходимо выбирать клин с наименьшими значениями угла α .

Величина угла ψ при остром лезвии и постоянных значениях α и φ не должна зависеть от глубины и скорости движения клина, так как все виды сопротивлений почвы, действующих на рабочую грань клина, отклонены от нормали на угол трения φ . В некоторых случаях значения угла между нормалью N и результирующей R значительно превышают угол трения φ .

Список литературы

1. Porietsky H. Stresses and deflections of cylindrical bodies in contact with application to contact of gears and of locomotive wheels. -J.Apple. Mech, 1960, vol. 17, №2, p. 191-201.
2. Reynolds O. Onrolling frietion. -Rhil. Trans. Rey. Soc., London, 1896, vol,160, pt.1, p.155-174.
3. Fromm H. Berechang Des Schlupfesbeim Rollen deformierharer Scheiben. -Ztsehr, angew. Math.und Mech, 1947. Bd7, H.1.p. 27-58.
4. Глаголев Н.И. Сопротивление перекачиванию цилиндрических тел.-Прикладная математика и механика. 1955, т.9, вып. 4, с. 318-333.
5. Carter F.W. On the action of a locomotive arriving wheel-Proc. Royal Soc. London Ser. A, 1936, vol. 112, №760, 151-157.
6. Чернилевский Д.В., Лаврова Е.В., Романов В.А. “Техническая механика” Москва, “Наука” Главная редакция физико-математической литературы, 1982 г.
7. Эрдеди А.А., Аникин И.В., Чуйков А.С., Медведев Ю.А. “Техническая механика” Издательство “Высшая школа” Москва-1971 г.
8. Мовнин М.С., Израелит А.Б., Рубашкин А.Г. “Основы технической механики” Издательство “Судостроение”, Ленинград 1973 г.
9. Васько Н.Г., Волосухин В.А., Кабельков А.Н., Бурцева О.А. “Теоретическая механика” Ростов-на-Дону “Феникс” 2012 г.
10. Просветов Г.И. “Теоретическая механика” Задачи и решения ООО Издательство “Альфа-Пресс” Москва 2010 г.
11. Лойцянский Л.Г, Лурье А.И. “Курс теоретической механики” Москва “Наука” Главная редакция физико-математической литературы, 1982 г.
12. Березкин Е.Н. “Лекции по теоретической механике” Издательство Московского Университета 1967 г.
13. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. “Теоретическая механика в примерах и задачах” Т.1. Статика и кинематика. Москва.: Наука, 1990 г.
14. Яблонский А.А. “Курс теоретической механики” Москва.:Высшая школа., 2004 г.
15. Никитин Н.Н. “Курс теоретической механики” Москва.:Высшая школа., 2003 г.
16. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики Москва “Наука”, 1986 г
17. Воронков И.М. “Курс теоретической механики” Москва.: Наука, 1965 г.
18. Гернет М.М. “Курс теоретической механики” Москва.:Высшая школа., 1973 г.
19. Добронравов В.В, Никитин Н.Н., “Курс теоретической механики” Москва.:Высшая школа., 1983 г.
20. Тарг С.М. “Краткий курс теоретической механики” Москва.:Высшая школа., 2008 г.
21. Путьята Т.В “Прикладная механика” Киев. Головное издательство издательского объединения “вища школа” 1977 г.
22. Шообидов Ш.А., Хабибуллаева Х.Н., Файзуллаева Ф.Д. “Назарий механика” Ўқув кўлланма.-Т. Янги аср авлоди. 2008 й.
23. Мирсаидов М.М. ва бошқалар “Назарий механиканинг қисқа курси” -Т.Ўзбекистон. 2008 й.
24. Халилов Ш.З. “Назарий механика (статика)” маърузалар матни. Фарғона 2021 й.
25. Халилов Ш.З., Султонов А. Трение нити о цилиндрическую поверхность и трение качения
26. Халилов Ш.З., Максудов О. Равновесие при наличии силы трения покоя и трения вращения
27. Халилов Ш.З., Королькова О. Равновесие при наличии трения скольжения
28. Халилов Ш.З., Шакирова Н. Условия равновесия твердого тела на шероховатой поверхности
29. Кленин Н.И., Попов И.Ф., Сакун В.А. “Сельскохозяйственные машины” Издательство “Колос”. Москва 1970 г

30. Халилов Ш.З., Хайдарова О.М. Некоторые вопросы теории трения ремня по шкиву. Научно-технический журнал ФерПИ, Том 19. №4. 2015 г
31. Бекжонов Р.Б., Камолхўжаев Ш.М., Ризаев Х.А. Физикадан русча-ўзбекча атамалар лугати Тошкент “Ўқитувчи” 1991 й
32. Кеппе О.Э Сборник коротких задач по теоретической механике. Москва “Высшая школа” 1989 г
33. Советский энциклопедический словарь (СЭС). Издательство “Советский энциклопедия”. Москва -1980 г
34. Шохайдарова П., Шозиетов Ш., Зоиров Ш. “Назарий механика”. Тошкент «Ўқитувчи», 1992й
35. Ахмадхўжаев В. «Назарий механика». Тошкент “Янги аср авлоди”, 2006 й
36. Hibbeler R.C. “Statics” engineering mekaniks, fourteenth edition, to the Students USA, 2013 й
37. Рашидов Т.Р., Шозиетов Ш., Муминов К.Б. “Назарий механика асослари”. Тошкент “Ўқитувчи”, 1991 й
38. Маткаримов, Ш. А., Зияев, А. Т., Тожибоев, Б. Т., & Кучкаров, Б. У. (2021). Покрытие задвижек и запорной арматуры тепловых сетей жидким теплоизоляционным покрытием. *Universum: технические науки*, (12-5 (81)).
39. Хамзаев, И. Х., Умаров, Э. С., Касимов, Э. У., & Ахмедов, А. У. (2019). Расчет многослойной плиты на упругом основании-Фер ПИ. *I Международной научно-практической кон-и*, 24-25.
40. Касимов, И. И., Дусматов, А. Д., Хамзаев, И. Х., Ахмедов, А. У., & Абдуллаев, З. Д. (2021). Исследование влияния напряженно-деформированного состояния трехслойных комбинированных пологих оболочек на их физико-механические характеристики. *Журнал Технических исследований*, 3(2).
41. Davidboev, B., Mirzaxonov, Y., Maxmudov, I., & Davidboeva, N. (2021). Yassi kamarli uzatmalar va transport mexanizmlarida kamarning lateral yig'ilishini tadqiq qilish. *Xalqaro ilmiy va texnologik tadqiqotlar jurnali* , 9 (1), 3666-3669.
42. Набиев, Т. С., Эркабоев, Х. Ж., & Махмудов, И. Р. (2021). О квадратно-гнездовом способе посева семян хлопчатника. In *Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные вопросы, достижения и инновации* (pp. 62-65).
43. Рахмонов, А. Т. У., & Ахтамбаев, С. С. (2021). Причины вибрации в станках и методы их устранения. *Scientific progress*, 2(6), 89-97.
44. Abducodirov, N., & Okyulov, K. (2021). IMPROVEMENT OF DRUM DRYER DESIGN. *Экономика и социум*, (4-1), 13-16.
45. Абдуллаев, М.М., Умаров, Э.С. (2021). “Секинлашган кокслаш қурилмаси реактори”. US. №FAP 01479. №FAP 20180009.
46. Hamzaev, I. H., Umarov, E. S., & Muminov, J. A. Calculation of the bearing capacity of steel beams, taking into account the development of plastic deformations in the operational stage. *Tadqiqot.uz ISSN 2181-9696 Doi Journal 10.26739/2181-9696 “Technical sciences” №2 Toshkent-2019*. 45-50.
47. Халилов, Ш. З., Тожибоев, Б. Т., & Кучкаров, Б. У. (2021). Причина скачков при трении. *Журнал Технических исследований*, 3(1).
48. Tojiboyev, B. T. (2021). Euphemism and gender: Linguocultural euphemisms among males and females in uzbek and english language. *International journal of discourse on innovation, integration and education*, 1(5), 8-11.

49. Qo'chqarov, B. U., Tojiboyev, B. T., & Axtambayev, S. S. (2021). Experimental determination of the gas consumption sent to the device for wet dusting in the humid mode. *Экономика и социум*, (6-1), 226-229.
50. Халилов, Ш. З., Тожибоев, Б. Т., Умаров, Э. С., & Кучкоров, Б. У. (2019). Прием и хранение зерновой смеси, поступающей после комбайнов. *Журнал Технических исследований*, (2).
51. Tojiboyev, B. T., Gapporov, Q. G., ugli Raxmonov, A. T. (2021). Reception and Storage of Grain Mixture Generated After the Combines. *International Journal of Engineering and Information Systems (IJEAIS)*. www.ijeais.org/ijeais, ISSN: 2643-640X Vol. 4 Issue 12, December - 2021, Pages: 96-100
52. Xudaynazarov, S., Donayev, B., Sobirjonov, T., & Qosimov, J. (2021). Materialning viskoelastik xususiyatlarini hisobga olgan holda baland konstruksiyalar dinamikasi. In *Conferences E3S Veb* (jild. 304-bet. 02004). EDP fanlari.
53. Маткаримов, А. А., & Тилавалдиев, Б. Т. (2021). Перспективы развития машиностроения в узбекистане. *Теория и практика современной науки*, (1), 244-247.
54. Касимов И. И. и др. Исследование влияния напряженно-деформированного состояния трехслойных комбинированных пологих оболочек на их физико-механические характеристики //Журнал Технических исследований. – 2021. – Т. 3. – №. 2.
55. Хамзаев И. Х. и др. Девор балкани ҳисобиға четки айирмалар усулини тадбири //Журнал Технических исследований. – 2021. – Т. 3. – №. 2.
56. Дусматов А. Д., Ҳамзаевич Х. И., Халилов Ш. З. Исследование напряженно-деформированного состояния двухслойных комбинированных пологих оболочек с учетом поперечных сдвигов и податливости клеевого шва //Universum: технические науки. – 2019. – №. 12-1 (69).
57. Касимов И. И. и др. Исследование состояния двухслойных осесимметричных цилиндрических оболочек на физико-механические характеристики //Техник тадқиқотлар журнали. – 2019. – №. 2.
58. Маткаримов Ш. А., Ахмедов А. У. Расчет асфальтобетонных дорожных покрытий на упругом основании //Главный редактор: Ахметов Сайранбек Махсутович, д-р техн. наук; Заместитель главного редактора: Ахмеднабиев Расул Магомедович, канд. техн. наук; Члены редакционной коллегии. – 2021. – С. 96.
59. Касимов, И. И., Дусматов, А. Д., Ахмедов, А. У., & Абдуллаев, З. Д. (2021). Расчет асфальтобетонных дорожных покрытий. *Журнал Технических исследований*, 3(1).
60. Dusmatov A. D. Investigation of strength and stability of three-layer combined plates used in underground structures //Scientific-technical journal. – 2019. – Т. 22. – №. 2. – С. 63-67.
61. Davidboev, B., Mirzakhanov, Y., Makhmudov, I., & Davidboeva, N. (2021). Research of lateral assembly of the belt in flat-belt transmissions and transport mechanisms. *International Journal of Scientific and Technology Research*, 9(1), 3666-3669.
62. угли Махмудов, И. Р., Умаров, Э. С., & Гаппаров, К. Г. (2021). Аналитическая и модельная оптимизация кинематических схем равномерно плотного прессования порошковых материалов. *Журнал Технических исследований*, 3(1).
63. Набиев, Т. С., & угли Махмудов, И. Р. (2021). Определение давления при прессовании порошковых материалов. *Журнал Технических исследований*, 3(1).

64. Халилов, Ш. З., Гапбаров, К. Г., & угли Махмудов, И. Р. (2021). Влияние травмирования и способов обмолота семян пшеницы на их биологические и урожайные свойства. *Журнал Технических исследований*, 3(1).
65. Кочкаров, Б. У. (2021). Улучшение промышленных устройств для очистки пыли и газа. *Scientific progress*, 2(1), 1714-1717.
66. Эргашев, Н. А., Маткаримов, Ш. А., Зияев, А. Т., Тожибоев, Б. Т., & Кучкаров, Б. У. (2019). Опытное определение расхода газа, подаваемого на пылеочищающую установку с контактным элементом, работающим в режиме спутникового вихря. *Universum: технические науки*, (12-1 (69)).
67. Халилов, Ш. З., Ахтамбаев, С. С., & Халилов, З. Ш. (2021). Результаты исследования динамики сушки хлебной массы в широкополосных валках. *Журнал Технических исследований*, 3(2).
68. Набиев Т. С., Тешабаев А. Э. Модернизация экономики: проблемы и инновации в исследовательской подготовке специалистов //Совершенствование методологии и организации научных исследований в целях развития общества. – 2021. – С. 31-38.
69. Набиев, Т. С. (2021). Высшее образование-высшая цель молодёжи. *Школа Науки*, (2), 52-54.
70. Набиев Т. С. Взаимодействие ротационных рабочих органов сеялки и культиватора с почвой //Башкирского государственного аграрного университета. – 2012. – С. 42.
71. Набиев Т. С. Оценка знаний по деталям машин и основам конструирования для специальности. "Профессиональное обучение" //Международный журнал экспериментального образования. – 2011. – №. 5. – С. 144-145.
72. Маткаримов А. А., Тилавалдиев Б. Т. Перспективы развития машиностроения в узбекистане //Теория и практика современной науки. – 2021. – №. 1. – С. 244-247.
73. Xamzaev, I. X., Umarov, E. S., Kasimov, E. U., & Axmedov, A. U. (2019). Raschet mnogoslounoy pliti na uprugom osnovanii-Fer PI. *I Mejdunarodnoy nauchno-prakticheskoy kon-i*, 24-25.
74. Xamzaev, X. I., and E. S. Umarov. "Uravneniya izgiba mnogoslounix balok." 2181-7200.
75. Mo'minov, J. A., Umarov, E. S., & Ortigaliev, B. S. (2019). Changlarni kombinatsion tozalash texnologiyasi. *Jurnal Texnicheskix issledovaniy*, (2).
76. Mo'minov, J. A., Umarov, E. S., & Ortigaliev, B. S. (2019). Og'ir yuklanishli va tez harakatlanuvchi mashina qismlarida sirpanish podshipniklarini tanlash. *Mashinasozlik ishlab chiqarish va ta'lim: muammolar va innovatsion yechimlar-2019y*, 338-340.
77. Umarov, E. (2021). On the effect of axial displacements on the strength of frames. *Technical Sciences*, 1, 24-28.
78. Xamzaev I. X., Umarov E. S. Primenenie metoda konechnyx raznostey k raschetu balok-stenok-FarPI ITJ NTJ FerPI (STJ FerPI), 2018 //Tom. – Т. 22. – S. 48-52
79. Hamzaev, I., & Umarov, E. (2021). Application of the method of finite differences to the calculation of shallow shells. *Technical Sciences*, 1, 11-17.
80. Маткаримов А. А., Маткаримов Ш. А. Развитие сельскохозяйственного машиностроения в узбекистане: проблемы и перспективы //Экономика и социум. – 2021. – №. 1. – С. 579-582.
81. Халилов Ш. З., Умаров Э. С., Халилов З. Ш. Результаты исследований очистки зерноуборочного комбайна //Журнал Технических исследований. – 2021. – Т. 3. – №. 2.

82. Хамзаев И. Х. и др. Расчет несущая способности стальных балок при учете развития пластических деформаций в эксплуатационной стадии //Журнал Технических исследований. – 2019. – №. 2.
83. Abdullaev M. M., Umarov E. S. Neft xom ashyosidan koks olishda, reaktorda pishirilgan koksni burg'ulash jarayonidagi ayrim texnologik usullar //Jurnal Texnicheskix issledovaniy. – 2019. – №. 5.
84. Халилов, Ш. З., Абдуллаев, Ш. А., Халилов, З. Ш., & Умаров, Э. С. (2019). Влияние скорости и угла вбрасывания частицы на характер движения компонентов зерно соломистого вороха. *Журнал Технических исследований*, (2).
85. Gapparov, KG, Erkaboev, HJ, Mansurov, YN, & Aksenov, AA (2021). Ikkilamchi babbittlarning strukturaviy tahlili. *Metallurg* ,65 (5), 549-555.
86. Tojiboyev B. T., Alijon o'g'li M. B. Some questions of suffixation, impact and alternation by the background in borrowed words with the value of a face in russian //International journal of discourse on innovation, integration and education. – 2021. – Т. 1. – №. 5. – С. 71-77.
87. Мирзаходжаев Ш. Ш., Тожибоев Б. Т., Ахмедов Р. Р. Характеристика опытного образца комбинированного фронтального плуга с активными рабочими органами //Концепции устойчивого развития науки в современных условиях. – 2019. – С. 46-48.
88. Khudainazarov S., Sabirjanov T., Ishmatov A. Assessment of dynamic characteristics of high-rise structures taking into account dissipative properties of the material //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2019. – Т. 1425. – №. 1. – С. 012009.
89. Khudainazarov, S., Donayev, B., Sabirjanov, T., & Qosimov, J. (2021). Dynamics of high-rise structures taking into account the viscoelastic properties of the material. In *E3S Web of Conferences* (Vol. 304, p. 02004). EDP Sciences.
90. Умаров, Б. Т., Сабиржанов, Т. М., & Бахадиров, Г. А. (2016). Совершенствование технологического оборудования для сортировки клубней картофеля. In *Научно-технический прогресс: актуальные и перспективные направления будущего* (pp. 215-218).
91. Дўсматов, А.Д., Сабиржанов, Т.М., Ахмедов, А.У. (2014). Исследование напряженно-деформированное состояние трёхслойных комбинированных оболочек с композиционными слоями. // Научно-технический журнал Ташкентского института инженеров железнодорожного транспорта “Вестник” (ОАК №121/4, 26.01.2006) – с. 26-29
92. Бахадиров, Г. А., Абдукаримов, А., Хусанов, К., Умаров, Б. Т., & РУз, А. Н. (2017). Управление и выбор мощности управляющего двигателя power control and selection controlling engine. *Халқаро илмий-техникавий анжуман, 1*, 283.
93. Bahadirov, G., Sultanov, T., Umarov, B., & Bakhadirov, K. (2021, July). Advanced machine for sorting potatoes tubers. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 883, No. 1, p. 012132). IOP Publishing.
94. Oqyo, K. R. O. G. L., Abduqodirov, N. S. O. G. L., O'G'Li, A. T. L., & G'Azaloy, G. (2021). Mashina va mexanizmlarning ish jarayonida vujutga kelgan vibratsiya sabablari va so'ndirish qurilmalari. *Scientific progress*, 2(6), 576-579.
95. Qo'Chqarov, Bobirmirzo Ulug'Bekovich, and Abduxalim Toshpo'Lat O'G'Li. "Mashinasozlikda metall kesish dastgohlarining mexanik ishlov jarayonida vujudga keladigan vibratsiya sabablari va uni bartaraf etish muammolari." *Scientific progress* 2.6 (2021): 905-909.

96. Давидбоева, Н.Б., Мирзахонов, Ю.У., Давидбоев, Б.Н. (2019). Исследование бокового схода ремня в плоскоремённых и транспортирующих механизмах //“Машинасозлик ишлаб чиқариш ва таълим:Муаммолар ва инновацион ечимлар” Республика илмий-техник анжумани 2019 йил 19-20 сентябрь.
97. Джураев, А., Давидбаев, Б. Н., Мирзаханов, Ю., & Зулпиев, С. Шарнирно-рычажная муфта. *Патент Кыргызской Республики, 116.*
98. Джураев, А., Давидбаев, Б. Н., Зулпиев, С., & Давидбаева, Н. Б. (2014). Определение передаточной функции рычажно-шарнирной муфты с учетом упругих элементов в шарнирах механизма. *Известия, (2 Часть 2), 100.*
99. Джураев, А., Давидбаев, Б., & Давидбаева, Н. (2021). Влияние взаимодействие летучки с амортизирующей пластин. сепаратора на качественные показатели хлопка-сырца. *Збірник наукових праць ЛОГОΣ, 72-76.*
100. Ш.З. Халилов, А.Х. Умурзаков. Определение фактической пропускной способности комбайна. «Фан ва ишлаб чиқариш интеграцияси муаммолари». Республика илмий-амалий конференцияси материаллари тўплами. Наманган 2008 й, 367-368 бетлар.
101. Ш.З. Халилов “Подготовка зерноуборочных комбайнов к работе”. Монография Фергана 2019 й.
102. Ш.З. Халилов Каталог по устройству, эксплуатации и технического обслуживания зерноуборочных комбайнов типа CASE (U.S.A) 2012 й.
103. Gapparov, K. G., Erkaboev, N. J., Mansurov, Y. N., & Aksenov, A. A. (2021). Structural Analysis of Secondary Babbits. *Metallurgist, 65(5), 549-555.*

Оглавление

Введение.....	3
1. Трение.....	3
а) Трение скольжения.....	3
б) Законы Кулона.....	4
в) Угол и конус трения.....	5
г) Трение качения.....	6
2. Трение скольжения и качения.....	9
а) Трения скольжения.....	8
б) Трение качения.....	18
в) Жидкостное трение.....	20
3. Трение покоя.....	21
4. Равновесие твердого тела при наличии трения скольжения, коэффициент.....	22
а) трение скольжения.....	22
5. Задача о равновесии при наличии трения.....	45
а) Общие сведения.....	45
б) Трение качения и его коэффициента.....	49
в) Трении верчения и его коэффициента.....	50
6. Равновесие тела при наличии трения.....	52
а) Трения скольжения.....	52
б) Трение гибких тел Формула Эйлера.....	59
в) Трение качения и его коэффициента. Момент трения качения.....	59
7. Трение и связи с трением.....	65
а) Трение скольжения, и его законы.....	66
б) Реакция связи с трением, Задачи.....	66
в) Трение гибкой нити о цилиндрическую поверхность.....	69
д) Трение качения.....	70
8. Теория трения ремня по шкиву.....	72
9. Некоторые случаи равновесия тел при наличии трения.....	76
10. Некоторые вопросы проскальзывания при трении качения.....	84
11. Равновесие твердых тел при наличии трения.....	86
а) Трение гибких тел.....	86
б) Трение нити о цилиндрическую поверхность.....	92
12. Равновесие при наличии силы трения покоя. Самогорможения.....	95
а) Трение верчения и его коэффициента.....	96
13. Равновесие при наличии трения скольжения, Закон Кулона.....	97
14. Проскальзывание при качении абсолютно жесткого катка.....	98
15. Относительное скольжение поверхности катка.....	101
16. Условия равновесия твердого тела на шероховатой поверхности.....	105
17. Примеры на определение угла и коэффициента трения.....	107
18. О скачках при трении.....	109
19. Решение задач при наличии трение качения.....	117
20. Равновесие твердого тела при наличии трения качения. Момент трения качения.....	125
21. Решение задач при наличии трения скольжения.....	128
22. Трение и сопротивление почвы.....	138
а) трение почвы о поверхность рабочих органов машин, внутреннее трения.....	138
Список литературы.....	140